Geometria

Quarto appello, a.a. 2001/2002
compito 1

17 giugno 2002

Esercizio 1 Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -4 & -2 & -1 \\ -7 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare il polinomio caratteristico di A.
2. Determinare gli autovalori di A.
3. Determinare basi per gli autospazi di A.
4. Dire, motivando la risposta se A è diagonalizzabile o no.

Esercizio 2 Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 5 & 9 \\ -2 & -8 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

1. Determinare il rango di A.
2. Determinare una base per il nucleo e per l'immagine di A.
3. Detto $b_k = \begin{pmatrix} -2k \\ -3k-2 \\ 3k+5 \end{pmatrix}$, dire, motivando la risposta, per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema lineare $Ax = b_k$ ammette soluzione ed in tal caso determinarle tutte.

Esercizio 3 Sia $W \subseteq \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Determinare una base ortonormale di W.
2. Determinare una base di $W^\perp$
3. Detto $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, determinare la decomposizione ortogonale di v come somma $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in W$ e $v_2 \in W^\perp$

Esercizio 4 Sia r la retta di equazioni cartesiane

$$r := \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - z = 3 \end{cases}$$

e $P = (1, 2, -1)$.

1. Determinare la retta s passante per P, incidente ad r ed ortogonale a r.
2. Determinare il piano Π passante per P ed ortogonale a s.
3. Dire, motivando la risposta, se esiste un piano contenente r e parallelo a Π ed in caso di risposta affermativa, determinarlo.

Soluzioni proposte

Soluzione dell'esercizio 1 (1). Il polinomio caratteristico è dato da:

$$P_A(t) = \det(A - tI) = \det \begin{pmatrix} 5-t & 3 & 1 \\ -4 & -2-t & -1 \\ -7 & -5 & -1-t \end{pmatrix}$$

Sviluppando il determinante rispetto alla prima riga si ottiene

$$\begin{aligned} P_A(t) &= (5-t)((2+t)(1+t)-5) - 3(4(1+t)-7) + 20 - 7(2+t) = \\ &= (5-t)(t^2+3t-3) - 12t + 9 + 20 - 14 - 7t = \\ &= 5t^2 + 15t - 15 - t^3 - 3t^2 + 3t - 19t + 15 \\ &= -t^3 + 2t^2 - t = -t(t-1)^2 \end{aligned}$$

(2). Gli autovalori sono le radici di $P_A(t)$ e quindi sono 0 e 1.

(3). Indichiamo con V_0 e V_1 gli autospazi relativi agli autovalori 0 e 1 rispettivamente. Allora $V_0 = \ker(A)$ e $V_1 = \ker(A - I)$. Calcoliamo una base per $\ker(A)$. Riduciamo a scala la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -4 & -2 & -1 \\ -7 & -5 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $\mathrm{rk}(A) = 2$ ossia $\dim(\ker(A)) = 1$. Una base si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 5x + 3y + z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2y \\ 5x + 5y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2y \\ x = -y \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \\ z = 2\alpha \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Una base di V_0 è quindi data da: $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Analogamente riducendo a scale $A - I$ si ottiene

$$A - I = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ -7 & -5 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi anche $\dim(V_1) = \dim(\ker(A - I)) = 1$ e risolvendo il sistema si ottiene per V_1 la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

(4). La matrice A non è diagonalizzabile. Ricordiamo infatti che una matrice è diagonalizzabile se e solo se la somma delle dimensioni degli autospazi è pari alla dimensione dello spazio ambiente (ordine della matrice). Nel nostro caso la somma delle dimensioni degli autospazi è 2 è inferiore alla dimensione dello spazio ambiente ($\mathbb{R}^3$) che è 3. ❑

Soluzione dell'esercizio 2 (1). Riduciamo in forma a gradini la matrice A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 5 & 9 \\ -2 & -8 & -6 & -12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $\mathrm{rk}(A) = 2$.

(2). $\dim(\mathrm{im}(A) = \mathrm{rk}(A) = 2$ e una base di $\mathrm{im}(A)$ è data dalle colonne della matrice A corrispondenti alle colonne dei pivot, quindi una base di $\mathrm{im}(A)$ è data da $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$.

Osserviamo che $\dim(\ker(A)) = 4 - \mathrm{rk}(A) = 4 - 2 = 2$. Per determinare una base del nucleo risolviamo il sistema lineare omogeneo associato alla matrice A che è equivalente a quello associato alla sua ridotta a scala:

$$\begin{cases} x+4y+2z+3w=0 \\ z+3w=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+4y+2z+3w=0 \\ z=-3w \end{cases} \iff \begin{cases} x+4y-3w=0 \\ z=-3w \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=-4y+3w \\ z=-3w \end{cases} \iff \begin{cases} x=-4\beta+3\alpha=0 \\ y=\beta \\ z=-3\alpha \\ w=\alpha \end{cases} \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3\\ 0\\ -3\\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -4\\ 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

e quindi una base di $\ker(A)$ è data da $\left\{ \begin{pmatrix} 3\\ 0\\ -3\\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4\\ 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(3). Riducendo a scala la matrice completa del sistema, $(A|b_k)$ si ottiene la matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 3 & -2k \\ 0 & 0 & 1 & 3 & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k+1 \end{array}\right)$$

quindi il sistema è compatibile se e solo se $k+1=0$ ossia se e solo se $k=-1$. Risolvendo il sistema con $k=-1$ si ottiene che le soluzioni sono date da:

$$\begin{cases} x=8-4\beta+3\alpha=0 \\ y=\beta \\ z=-3-3\alpha \\ w=\alpha \end{cases} \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R} \iff \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\\ 0\\ -3\\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3\\ 0\\ -3\\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -4\\ 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

❏

Soluzione dell'esercizio 3 (1). Applichiamo il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt ai due vettori w_1 e w_2.

$$\begin{aligned} w_1' &= w_1 \\ w_2' &= w_2 - \frac{\langle w_2, w_1'\rangle}{\langle w_1', w_1'\rangle} w_1 = w_2 - \frac{1}{2} w_1 = \begin{pmatrix} -1/2\\ 1\\ 1/2\\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Una base ortonormale si ottiene allora normalizzando i due vettori:

$$\begin{aligned} w_1'' &= \frac{w_1'}{\sqrt{\langle w_1', w_1'\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{2}} w_1' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2}\\ 0\\ 1/\sqrt{2}\\ 0 \end{pmatrix} \\ w_2'' &= \frac{w_2}{\sqrt{\langle w_2', w_2'\rangle}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} w_2' = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6}\\ \sqrt{2}/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{6}\\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2). $W^\perp$ è l'insieme dei vettori ortogonali ha tutti i vettori di W, quindi $x\in W^\perp$ se e solo se

$$\begin{cases} \langle w_1, x\rangle = 0 \\ \langle w_2, x\rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1+x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1=-x_3 \\ x_2=-x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1=-\alpha \\ x_2=-\alpha \\ x_3=\alpha \\ x_4=\beta \end{cases}$$

e quindi una base di $W^\perp$ è data da $\left\{ \begin{pmatrix} 1\\ -1\\ -1\\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(3).

$$\begin{aligned} v_1 &= \langle v, w_1''\rangle w_1'' + \langle v, w_2''\rangle w_2'' = \frac{6}{\sqrt{2}} w_1'' + \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} w_2'' = \begin{pmatrix}3\\0\\3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\4\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\5\\0\end{pmatrix} \\ v_2 &= v - v_1 = \begin{pmatrix}3\\6\\3\\-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\4\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\-2\\-3\end{pmatrix} \end{aligned}$$

❑

Soluzione dell'esercizio 4 (1). Scriviamo equazioni parametriche per r.

$$r := \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

Scriviamo la retta tra il punto P ed il generico punto $r(t) = 1, t, -1-t)$ della retta r.

$$X = P + \lambda(r(t) - P) \tag{1}$$

e determiniamo t in modo che la retta $s(t)$ sia perpendicolare a r. Si ottiene la condizione

$$\langle \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, r(t) - P\rangle = 0$$

Ossia

$$\langle \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\t\\-1-t\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\rangle = 0 \iff \langle \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\t-2\\-t\end{pmatrix}\rangle = 0 \iff 2t - 2 = 0 \iff t = 1.$$

Sostituendo nella (1) si ottiene l'equazione parametrica di s

$$s := \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \tag{2}$$

(2). Scriviamo la generica equazione del piano per P

$$\langle v, X - P\rangle = 0 \tag{3}$$

Perché tale piano sia ortogonale alla retta s deve aversi v parallelo al vettore direttore di s. Basta allora prendere v uguale ad un multiplo tale vettore, ad esempio $v = (0, 1, 1)$. Si ottiene l'equazione per Π

$$\langle \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z+1\end{pmatrix}\rangle = 0 \iff y + z - 1 = 0 \tag{4}$$

(3). Dato che la retta s è ortogonale sia a r che a Π allora r è parallela a Π, quindi, preso un punto Q di r, il piano per Q e parallelo a Π deve necessariamente contenere la retta r. Prendiamo $Q = (1, 1, -2) \in r$ il generico piano parallelo a Π ha equazione $y + z = d$ affinché tale piano passi per Q dovrà aversi $1 - 2 = d$ ossia $d = -1$. Il piano cercato ha quindi equazione $y + z + 1 = 0$.

In effetti, sostituendo l'equazione parametrica della retta r nell'equazione appena trovata, si verifica immediatamente, che la retta r è contenuta in questo piano. ❑