Geometria

Quarto appello, a.a. 2001/2002
compito 2

17 giugno 2002

Esercizio 1 Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare il polinomio caratteristico di A.
2. Determinare gli autovalori di A.
3. Determinare basi per gli autospazi di A.
4. Dire, motivando la risposta se A è diagonalizzabile o no.

Esercizio 2 Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & -7 & -4 \\ -3 & -6 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Determinare il rango di A.
2. Determinare una base per il nucleo e per l'immagine di A.
3. Detto $b_k = \begin{pmatrix} 2k \\ 5k+1 \\ -7k-2 \end{pmatrix}$, dire, motivando la risposta, per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema lineare $Ax = b_k$ ammette soluzione ed in tal caso determinarle tutte.

Esercizio 3 Sia $W \subseteq \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare una base ortonormale di W.
2. Determinare una base di $W^\perp$
3. Detto $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, determinare la decomposizione ortogonale di v come somma $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in W$ e $v_2 \in W^\perp$

Esercizio 4 Sia r la retta di equazioni cartesiane

$$r := \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x - 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

e $P = (-1, 1, 3)$.

1. Determinare la retta s passante per P, incidente ad r ed ortogonale a r.
2. Determinare il piano Π passante per P ed ortogonale a s.
3. Dire, motivando la risposta, se esiste un piano contenente r e parallelo a Π ed in caso di risposta affermativa, determinarlo.

Soluzioni proposte

Soluzione dell'esercizio 1 (1). $P_A(t) = -t(t-3)^2$.

(2). Autovalori 0 e 3.

(3). Una base di V_0 è $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. Una base di V_3 è $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(4). La matrice è diagonalizzabile, dato che la somma delle dimensioni degli autospazi è 3 che è pari alla dimensione dello spazio ambiente. ❑

Soluzione dell'esercizio 2 (1). Una ridotta a scala di A è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $\mathrm{rk}(A) = 2$.

(2). Una base di $\mathrm{im}(A)$ è data da $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}$. Una base di $\ker(A)$ è data da $\left\{ \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(3). Una ridotta a scala della matrice completa del sistema $(A|b_k)$ è data da

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 & 2k \\ 0 & 0 & 1 & -4 & k+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k \end{array} \right)$$

Quindi il sistema è risolubile se e solo se $k = 0$. In tal caso le soluzioni sono espresse da:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

❑

Soluzione dell'esercizio 3 (1). Base ortogonale

$$\begin{aligned} w_1' &= w_2 \\ w_2' &= w_1 - \frac{\langle w_1, w_1' \rangle}{\langle w_1', w_1' \rangle} w_1 = w_1 - \frac{1}{2} w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Base ortonormale

$$\begin{aligned} w_1'' &= \frac{w_1'}{\sqrt{\langle w_1', w_1' \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{2}} w_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ w_2'' &= \frac{w_2}{\sqrt{\langle w_2', w_2' \rangle}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} w_2' = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{10} \\ \sqrt{2}/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{10} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2). Una base di $W^\perp$ è data da $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(3).

$$v_1 = \langle v, w_1'' \rangle w_1'' + \langle v, w_2'' \rangle w_2'' = \frac{6}{\sqrt{2}} w_1'' + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} w_2'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/5 \\ 1/5 \\ 2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 16/5 \\ 2/5 \\ 14/5 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = v - v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/5 \\ 16/5 \\ 2/5 \\ 14/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 9/5 \\ -12/5 \\ -9/5 \end{pmatrix}$$

❑

Soluzione dell'esercizio 4 (1). Equazione parametrica di r

$$r := \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}$$

Retta generica per P ed incidente ad r

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P + \lambda(\begin{pmatrix} 2 \\ 2+t \\ t \end{pmatrix} - P) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1+t \\ t-3 \end{pmatrix}$$

Condizione di ortogonalità:

$$\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1+t \\ t-3 \end{pmatrix} \rangle = 0 \iff 2t - 2 = 0 \iff t = 1$$

Equazione di s

$$s := \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

(2).

$$\Pi := 3(x+1) + 2(y-1) - 2(z-3) = 0 \iff 3x + 2y - 2z + 7 = 0$$

(3). $Q = (2, 2, 0) \in r$. Dato che r è parallela a Π, il piano per Q parallelo a Π contiene r. La sua equazione è data da

$$3(x-2) + 2(y-2) - 2(z) = 0 \iff 3x + 2y - 2z - 10 = 0$$

❑