Geometria

Sesto appello, a.a. 2001/2002

17 settembre 2002

Esercizio 1 Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare il polinomio caratteristico di A.
2. Determinare gli autovalori di A.
3. Determinare basi per gli autospazi di A.
4. Dire, motivando la risposta se A è diagonalizzabile o no.

Esercizio 2 Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & 12 & 7 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Determinare il rango di A.
2. Determinare una base per il nucleo e per l'immagine di A.
3. Detto $b_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k+2 \\ 2k+4 \end{pmatrix}$, dire, motivando la risposta, per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il sistema lineare $Ax = b_k$ ammette soluzione ed in tal caso determinarle tutte.

Esercizio 3 Sia $W \subseteq \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare una base ortonormale di W.
2. Determinare una base di $W^\perp$
3. Detto $v = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}$, determinare la decomposizione ortogonale di v come somma $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in W$ e $v_2 \in W^\perp$

Esercizio 4 Sia r la retta di equazioni cartesiane

$$r := \begin{cases} x - 3y - 2z = 0 \\ x - 3y + 4z = 3 \end{cases}$$

e $P = (2, 3, -2)$.

1. Determinare il piano Π passante per P ed ortogonale a r.
2. Determinare equazioni della retta s passante per P e parallela a r.
3. Tra tutti i piani contenenti s determinarne uno, se esiste, la cui distanza da ogni punto di r sia 4.

Soluzioni proposte

Soluzione dell'esercizio 1

(1). $P_A(t) = -t(t-3)^2$.

(2). Autovalori 0 e 3.

(3). Una base di V_0 è $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. Una base di V_3 è $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(4). La matrice è diagonalizzabile, dato che la somma delle dimensioni degli autospazi è 3 che è pari alla dimensione dello spazio ambiente. ❑

Soluzione dell'esercizio 2 (1). Una ridotta a scala di A è

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $\mathrm{rk}(A) = 2$.

(2). Una base di $\mathrm{im}(A)$ è data da $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$. Una base di $\ker(A)$ è data da $\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(3). Una ridotta a scala della matrice completa del sistema $(A|b_k)$ è data da

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & k+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k+2 \end{array} \right)$$

Quindi il sistema è risolubile se e solo se $k = -2$. In tal caso le soluzioni sono esattamente date da $\ker(A)$ e quindi sono espresse da:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

❑

Soluzione dell'esercizio 3 (1). Base ortogonale

$$\begin{aligned} w_1' &= w_1 \\ w_2' &= w_2 - \frac{\langle w_2, w_1' \rangle}{\langle w_1', w_1' \rangle} w_1 = w_2 - \frac{5}{9} w_1 = \begin{pmatrix} -1/9 \\ 4/9 \\ 1 \\ -1/9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Base ortonormale

$$\begin{aligned} w_1'' &= \frac{w_1'}{\sqrt{\langle w_1', w_1' \rangle}} = \frac{1}{3} w_1' = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} \\ w_2'' &= \frac{w_2'}{\sqrt{\langle w_2', w_2' \rangle}} = \frac{3}{\sqrt{11}} w_2' = \begin{pmatrix} -1/3\sqrt{11} \\ 4/3\sqrt{11} \\ 3/\sqrt{11} \\ -1/3\sqrt{11} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2). Una base di $W^\perp$ è data da $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(3). Osserviamo che $v = 16w_2 - 4w_1 \in W$, quindi $v_1 = v$ e $v_2 = 0$. ❑

Soluzione dell'esercizio 4 (1). Scriviamo equazioni parametriche per r.

$$r := \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = t \\ z = 1/2 \end{cases}$$

Il piano il punto P ed ed ortogonale a r ha equazione.

$$\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X - P \rangle = 0 \iff \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle = 0 \iff 3x + y - 9 = 0 \tag{1}$$

(2). La retta s ha equazioni parametriche

$$X = P + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e quindi equazioni cartesiane

$$\begin{cases} z + 2 = 0 \\ x - 3y + 7 = 0 \end{cases}$$

(3). La distanza di un punto di r da un piano che contiene s sarà sicuramente inferiore della distanza tra le due rette r e s. Calcoliamoci tale distanza. Per farlo calcoliamo il punto Q di intersezione di Π con r e quindi calcoliamo la distanza tra P e Q.

Calcolo di Q:

$$\begin{cases} 3x + y - 9 = 0 \\ x = 1 + 3t \\ y = t \\ z = 1/2 \end{cases} \iff \begin{cases} 10t + 3 - 9 = 0 \\ x = 1 + 3t \\ y = t \\ z = 1/2 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 3/5 \\ x = 14/5 \\ y = 3/5 \\ z = 1/2 \end{cases}$$

quindi $Q = (14/5, 3/5, 1/2)$.

$$d(P, Q) = \sqrt{(2 - 14/5)^2 + (3 - 3/5)^2 + (-2 - 1/2)^2} = \sqrt{\frac{253}{20}} < \sqrt{13} < \sqrt{16} = 4$$

Quindi un piano con le caratteristiche richieste non esiste. ❑