Geometria 1

Primo appello, sessione estiva, 1998/99

14 giugno 1999

Esercizio 1 Siano dati i seguenti punti in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{lll} P_1 = (0,0) & P_2 = (2,0) & P_3 = (-\sqrt{3}, -1,) \\ Q_1 = (1,1) & Q_2 = (\sqrt{3}+1, 2) & Q_3 = (0, 1-\sqrt{3}) \end{array}$$

Si dimostri che esiste un'unica affinità $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $F(P_i) = Q_i$. Si dica se F è un'isometria e in tal caso di che isometria si tratta.

Esercizio 2 Siano dati in $\mathbb{R}^3$ la retta r di equazioni $\{x+y-1 = x-y-z = 0\}$, il punto $P = (1,1,2)$ e il piano H_1 di equazione $\{x+2y+z = 3\}$.

Si trovi, se esiste, un piano H_2 passante per P, parallelo a r e perpendicolare a H_1, e si dica se è unico.

Si trovi, se esiste, un piano H_3 passante per P, perpendicolare a r e parallelo a H_1, e si dica se è unico.

Esercizio 3 Si determini il fascio delle coniche per i punti

$$P_1 = (0,3) \quad P_2 = (0,2) \quad P_3 = (2,2) \quad P_4 = (2,3)$$

Si dica se esiste una conica del fascio passante per $P_5 = (1,1)$ e se è unica; in tal caso, dire di che conica si tratta.

Esercizio 4 Si consideri il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ definito dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se ne trovi la segnatura e una base ortogonale.

Esercizio 5 Sia V uno spazio vettoriale con un prodotto scalare non degenere $\langle\ ,\ \rangle$. Sia W un sottospazio vettoriale di V, e $F : V \to V$ un operatore lineare tale che $F(W) \subset W$. Si dimostri che $F^*(W^\perp) \subset W^\perp$.

Soluzioni proposte

Soluzione dell'esercizio 1 Siano

$$\begin{aligned} v_1 &= P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & v_2 &= P_3 - P_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \\ w_1 &= Q_2 - Q_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} & w_2 &= Q_3 - Q_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Un semplice calcolo mostra che

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -2 \qquad \det \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} = -2$$

quindi sia v_1, v_2 che w_1, w_2 sono linearmente indipendenti, e pertanto l'affinità cercata esiste ed è unica. Cominciamo determinando la parte lineare. Questa è un'applicazione tale che $\psi(v_i) = w_i$ per $i = 1, 2$. Ma allora è data dato che la matrice $(v_1|v_2)$, ottenuta affiancando v_1 e v_2, porta i vettori della base standard di $\mathbb{R}^2$ su v_1 e v_2, l'applicazione ψ sarà definita dalla matrice

$$\begin{aligned} (w_1|w_2)(v_1|v_2)^{-1} &= \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La parte di traslazione è infine data da $Q_1 - P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e quindi l'affinità cercata è:

$$\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La parte lineare è data da una matrice ortogonale e quindi φ è una isometria inoltre il determinante di tale maice è 1 quindi o ùna rotazioe o una traslazione. Dato che evidentemente non è una traslazione (la parte lineare non è l'identità), φ è una rotazione. ❑

Soluzione dell'esercizio 2 Il generico piano passante per P è dato dall'equazione

$$a(x-1) + b(y-1) + c(z-2) = 0.$$

Perché tale piano sia parallelo ad r deve risultare che il vettore direzione della retta, che è il vettore $v = (1, -1, 2)$, sia perpendicolare al vettore (a, b, c) perpendicolare al piano, ossia

$$a - b + 2c = 0.$$

Affinché il piano sia perpendicolare al piano H_1 deve essere che i vettori normali ai due piani siano tra loro ortogonali, dato che il vettore normale ad H_1 è $(1,2,1)$ deve aversi

$$a + 2b + c = 0.$$

mettendo insieme le due condizioni trovate si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ a + 2b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3b + c = 0 \\ a + 5b = 0 \end{cases}$$

cha ha per soluzione $(a,b,c) = \alpha(-5,1,3)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Dato che tali soluzioni sono uniche a meno di moltiplicazione per una costante (sono uno spazio vettoriale di dimensione 1), il piano H_2 esiste ed è unico. Una sua equazione è data da:

$$5(x-1) - (y-1) - 3(z-2) = 0 \iff 5x - y - 3z + 2 = 0.$$

Se esistesse il piano H_3 allora H_1 dovrebbe essere perpendicolare alla retta r, dato che H_1 è parallelo ad H_3 che è perpendicolare a r. Quindi il vettore direzione della retta r dovrebbe essere linearmente dipendente dal vettore normale del piano H_1. Ma i vettori $(1,-1,2)$ e $(1,2,1)$ sono linearmente indipendenti: il minore dato dall eprime due colonne della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante 3 e quindi le righe della matrice sono linearmente indipendenti. ❑

Soluzione dell'esercizio 3 Le rette passnti per P_1, P_2 e per P_2, P_3 sono rispettivamente date dalle equazioni $x = 0$ e $x - 2 = 0$, che insieme formano la conica di equazione $x(x-2) = 0$. Le rette passanti per P_1, P_4 e per P_2, P_3 sono rispettivamente date dalle equazioni $y - 3 = 0$ e $y - 2 = 0$, che insieme formano la conica di equazione $(y-2)(y-3) = 0$. Poiché l'intersezione di queste due coniche è data dai quattro punti $P_1, P_2, P-3, P_4$, una equazione del fascio di coniche cercato è data da:

$$\alpha x(x-2) + \beta(y-2)(y-3) = 0 \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Affinché una conica del fascio passi per $P_5 = (1,1)$ dovrà essere che

$$\alpha 1(1-2) + \beta(1-2)(1-3) = 0$$

ossia $\alpha = 2\beta$ e quindi $(\alpha, \beta) = \lambda(2,1)$. Dato che la soluzione è unica a meno di moltiplicazione per una costante, si ha che esiste una unica conica del fascio passante per P_5 e una sua equazione si ottiene per $\alpha = 2$ e $\beta = 1$ ossia è

$$2x^2 + y^2 - 4x - 5y + 6 = 0.$$

Studiamo questa conica. La matrice associata è data da:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} \\ \hline -2 & -\frac{5}{2} & 6 \end{array}\right)$$

La parte quadratica è definita positiva (è diagonale con due autovalori positivi), quindi si hanno tre possibilità o è un'ellisse (forma canonica $x^2 + y^2 - 1 = 0$), oppure è vuota (forma canonica $x^2 + y^2 + 1 = 0$), oppure è un punto (forma canonica $x^2 + y^2 = 0$). Dato che la nostra conica contiene 5 punti, può soltanto essere un'ellisse. ❏

Soluzione dell'esercizio 4 Indichiamo con e_i i vettori della base standard di $\mathbb{R}^3$ e con $\langle , \rangle$ il prodotto scalare definito dalla matrice. Osserviamo che $\langle e_1, e_1 \rangle = 1 \neq 0$, quindi possiamo fare il seguente cambiamento di base:

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1 \\ v_2 &= e_2 - \frac{\langle e_2, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 = e_2 - \frac{-1}{1} e_1 = e_2 + e_1 \\ v_3 &= e_3 - \frac{\langle e_3, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 = e_3 - \frac{2}{1} e_1 = e_3 - 2e_1 \end{aligned}$$

Per costruzione v_2 e v_3 sono ortognali a v_1 inoltre:

$$\begin{aligned} \langle v_2, v_2 \rangle &= \langle e_1 + e_2, e_1 + e_2 \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle + \langle e_2, e_2 \rangle + 2\langle e_1, e_2 \rangle = \\ &= 1 + 2 - 2 = 1 \\ \langle v_3, v_3 \rangle &= \langle e_3 - e_1, e_3 - e_1 \rangle = \langle e_3, e_3 \rangle + 4\langle e_1, e_1 \rangle - 4\langle e_1, e_3 \rangle = \\ &= -1 + 4 - 8 = -5 \\ \langle v_2, v_3 \rangle &= \langle v_2, e_3 - 2e_1 \rangle = \langle v_2, e_3 \rangle - 2\langle v_2, e_1 \rangle = \langle v_2, e_3 \rangle = \\ &= \langle e_1 + e_2, e_3 \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle + \langle e_2, e_3 \rangle = 2 + 0 = 2 \end{aligned}$$

quindi la matrice del prodotto scalare rispetto a questa base è data da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Dato che $\langle v_2, v_2 \rangle = 1 \neq 0$ possiamo iterare il procedimento e considerare la base

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 \\ w_2 &= v_2 \\ w_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 = v_3 - \frac{2}{1} v_2 = v_3 - 2v_2 \end{aligned}$$

Per costruzione questa è una base ortogonale e

$$\langle w_3, w_3 \rangle = \langle v_3 - 2v_2, v_3 - 2v_2 \rangle = \langle v_3, v_3 \rangle + 4\langle v_2, v_2 \rangle - 4\langle v_2, v_3 \rangle = -5 + 4 - 8 = -9$$

e quindi la matrice associata rispetto a questa base è data da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Quindi l'indice di positività del prodotto scalare è 2, l'indice di negatività è 1 e l'indice di nullità è 0.

Scriviamo esplicitamente la base ortogonale che abbiamo trovato:

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ w_2 &= v_2 = e_2 + e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ w_3 &= v_3 - 2v_2 = e_3 - 2e_1 - 2(e_2 + e_1) = e_3 - 2e_2 - 4e_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

❑

Soluzione dell'esercizio 5 Sia $v \in W^\perp$ e proviamo che allora $F^*(v) \in W^\perp$. Se $w \in W$ allora

$$\langle F^*(v), w \rangle = \langle v, F(w) \rangle = 0$$

dato che $v \in W^\perp$ e $F(w) \in W$ (si usa qui l'ipotesi che $F(W) \subset W$). Ma allora per l'arbitrarietà di $w \in W$ si ha che $F^*(v) \in W^\perp$ e quindi, per l'arbitrarietà di $v \in W^\perp$, $F(W^\perp) \subset W^\perp$. ❑