Geometria 1

Secondo appello, sessione estiva, 1998/99

14 luglio 1999

Esercizio 1 Siano dati i seguenti punti in $\mathbb{P}^2$:

$$\begin{array}{llll} P_1 = [2,0,0] & P_2 = [1,1,0] & P_3 = [1,0,1] & P_4 = [3,1,1] \\ Q_1 = [-1,0,1] & Q_2 = [1,-1,0] & Q_3 = [1,0,0] & Q_4 = [2,0,1] \\ R_1 = [-1,0,1] & R_2 = [1,-1,0] & R_3 = [1,0,0] & R_4 = [2,-1,1] \end{array}$$

Si dica, motivando la risposta, se

1) esiste una proiettività φ tale che $\varphi(P_i) = Q_i$ per ogni i;

2) esiste una proiettività φ tale che $\varphi(P_i) = R_i$ per ogni i.

In caso di risposta affermativa se ne determini esplicitamente una e se ne discuta l'unicità.

Esercizio 2 Siano date le rette

$$r = \begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \qquad s = \{(1,1,0) + t(0,0,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Si verifichi che sono sghembe. Si trovino due piani H_1 e H_2 paralleli tali che $r \subset H_1$ e $s \subset H_2$. Si calcoli la distanza fra H_1 e H_2.

Esercizio 3 Si considerino le coniche

$$\mathcal{C} = \{x^2 - 4y^2 = 1\} \qquad \mathcal{C}_1 = \{x^2 + 3y = 4\} \qquad \mathcal{C}_2 = \{2xy - 1 = 0\}$$

e si dica di che coniche si tratta. Si dica se esiste un'affinità che manda $\mathcal{C}$ in $\mathcal{C}_1$, e se esiste se ne trovi una. Si dica se esiste un'affinità che manda $\mathcal{C}$ in $\mathcal{C}_2$, e se esiste se ne trovi una.

Esercizio 4 Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2. Si consideri il prodotto scalare definito da

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A\,{}^tB).$$

Si trovi una base ortogonale di V rispetto a $\langle\ ,\ \rangle$.

Esercizio 5 Sia A una matrice ortogonale 3×3 con determinante 1. Si dimostri che esiste $\theta \in \mathbb{R}$ e M ortogonale 3×3 tale che

$${}^tMAM = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cioè una rotazione di angolo θ intorno all'asse z.

Si dimostri la relazione

$$\cos\theta = \frac{1 - \operatorname{tr} A}{2}.$$

Soluzioni proposte

Soluzione dell'esercizio 1 I punti P_i sono in posizione generale, infatti:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0, \quad \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0,$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Una proiettività che porta i P_i sui Q_i (risp. R_i) esiste se e solo se i Q_i (risp R_i) sono anch'essi in posizione generale ed in tal caso è unica.

I Q_i non sono in posizione generale, infatti

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

I punti R_i sono in posizione generale, infatti:

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0, \quad \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0,$$

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Determiniamo la proiettività tale che $\varphi(P_i) = R_i$ per ogni i. Poniamo

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

scriviamo v_4 e w_4 come combinazione lineare rispettivamente di v_1, v_2, v_3 e w_1, w_2, w_3.

$$\begin{aligned} v_4 &= \frac{1}{2}v_1 + v_2 + v_3 \\ w_4 &= w_1 + w_2 + 2w_3 \end{aligned}$$

l'applicazione lineare che porta $v_1/2 \to w_1$, $v_2 \to w_2$ e $v_3 \to 2w_3$ (e tutti i suoi multipli scalari) definisce la proiettività cercata.

La matrice di tale applicazione lineare è data da:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

la proiettività cercata è allora data da:

$$\begin{aligned} \varphi([x_0, x_1, x_2]) &= \left[\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] = \\ &= [3x_2 + 2x_1 - x_0, x_1, x_0 - x_1 - x_2] \end{aligned}$$

❑

Soluzione dell'esercizio 2 Determiniamo equazioni parametriche della prima retta.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=1-x \\ z=\frac{x}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x=2t \\ y=1-2t \\ z=t \end{cases}$$

e quindi

$$r = \{(0,1,0)+t(2,-2,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

La giacitura della retta r è generata dal vettore $v=(2,-2,1)$ mentre la giacitura della retta s è generata dal vettore $w=(0,0,1)$. v e w sono evidentemente linearmente indipendenti, quindi per verificare che le rette sono sghembe, basta vedere che non hanno punti in comune. Sostituendo l'espressione parametrica della retta di s nell'equazione di r si vede immediatamente che le due rette non hanno punti in comune (si ha che i punti di s sono tali che $x=y=1$, mentre per i punti di r si ha $x+y=1$).

La giacitura dei due pioni sarà data dallo spazio generato da v e w, e dovranno passare rispettivamente per un punto di r ed uno di s, quindi le equazioni parametrichge dei due piani sono:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{(0,1,0)+\lambda(2,-2,1)+\mu(0,0,1) \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\} \\ H_2 &= \{(1,1,0)+\lambda(2,-2,1)+\mu(0,0,1) \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Dato che i due piani sono paralleli, la reciproca distanza è uguale alla distanza di un punto di uno dei due piani dall'altro piano. Detto $P=(1,1,0)$, allora

$$d(H_1,H_2)=d(P,H_1).$$

Determiniamo un'equazione implicita di H_1. Il sistema nelle incognite λ,μ dato da

$$\begin{cases} x=2\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=\mu \end{cases}$$

ha soluzione se e solo se $x+y-1=0$, che è quindi l'equazione di H_1.

Ma allora

$$d(H_1,H_2)=d(P,H_1)=\frac{|1+1-1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

❑

Soluzione dell'esercizio 3 La matrice di $\mathcal{C}$ è

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

che è equivalente a

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

e quindi $\mathcal{C}$ è una iperbole. La matrice di $\mathcal{C}_1$ è

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 \\ \hline 0 & -3/2 & -4 \end{array}\right)$$

il determinante di tale matrice è $-9/4$ quindi è una conica non degenere, la sua parte quadratica è degenere, quindi $\mathcal{C}_1$ è una parabola. Non esiste,per tanto, alcuna affinità che porti l'una sull'altra.

La matrice della conica $\mathcal{C}_3$ è:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

il determinante della matrice è 1 quindi la conica è non degenere. Il determinante della parte quadratica è $-1 < 0$, quindi $\mathcal{C}_2$ è un'iperbole. Esiste quindi una affinità che porta $\mathcal{C}$ su $\mathcal{C}_2$. Determiniamone una.

Osserviamo che

$$x^2 - 4y^2 - 1 = (x+2y)(x-2y) - 1 = 2\frac{x+2y}{\sqrt{2}}\frac{x-2y}{\sqrt{2}} - 1$$

e quindi se (x, y) è un punto di $\mathcal{C}$ (ossia $x^2 - 4y^2 - 1 = 0$), allora il punto

$$\varphi(x, y) = (x', y') = (\frac{x+2y}{\sqrt{2}}, \frac{x-2y}{\sqrt{2}})$$

è un punto di $\mathcal{C}_2$ (ossia $2x'y' - 1 = 0$), quindi φ è l'affinità cercata. ❑

Soluzione dell'esercizio 4 Consideriamo le matrici

$$\begin{array}{ll} E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

È noto che $\mathcal{E} = \{E_{1,1}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,2}\}$ è una base di V; inoltre

$$\begin{array}{rcl} \langle E_{1,1}, E_{1,2} \rangle & = & \operatorname{tr} E_{1,1}{}^t E_{1,2} \operatorname{tr} E_{1,1}E_{2,1} = \operatorname{tr} 0 = 0 \\ \langle E_{1,1}, E_{2,1} \rangle & = & \operatorname{tr} E_{1,1}{}^t E_{2,1} \operatorname{tr} E_{1,1}E_{1,2} = \operatorname{tr} E_{1,2} = 0 \\ \langle E_{1,1}, E_{2,2} \rangle & = & \operatorname{tr} E_{1,1}{}^t E_{2,2} \operatorname{tr} E_{1,1}E_{2,2} = \operatorname{tr} 0 = 0 \\ \langle E_{1,2}, E_{2,1} \rangle & = & \operatorname{tr} E_{1,2}{}^t E_{2,1} \operatorname{tr} E_{1,2}E_{1,2} = \operatorname{tr} 0 = 0 \\ \langle E_{1,2}, E_{2,2} \rangle & = & \operatorname{tr} E_{1,2}{}^t E_{2,2} \operatorname{tr} E_{1,2}E_{2,2} = \operatorname{tr} E_{1,2} = 0 \\ \langle E_{2,1}, E_{2,2} \rangle & = & \operatorname{tr} E_{2,1}{}^t E_{2,2} \operatorname{tr} E_{2,1}E_{2,2} = \operatorname{tr} 0 = 0 \end{array}$$

quindi $\mathcal{E}$ è una base ortogonale. Si osservi inoltre che

$$\begin{array}{rcl} \langle E_{1,1}, E_{1,1} \rangle & = & \operatorname{tr} E_{1,1}{}^t E_{1,1} \operatorname{tr} E_{1,1}E_{1,1} = \operatorname{tr} E_{1,1} = 1 \\ \langle E_{1,2}, E_{1,2} \rangle & = & \operatorname{tr} E_{1,2}{}^t E_{1,2} \operatorname{tr} E_{1,2}E_{2,1} = \operatorname{tr} E_{1,1} = 1 \\ \langle E_{2,1}, E_{2,1} \rangle & = & \operatorname{tr} E_{2,1}{}^t E_{2,1} \operatorname{tr} E_{2,1}E_{1,2} = \operatorname{tr} E_{2,2} = 1 \\ \langle E_{2,2}, E_{2,2} \rangle & = & \operatorname{tr} E_{2,2}{}^t E_{2,2} \operatorname{tr} E_{2,2}E_{2,2} = \operatorname{tr} E_{2,2} = 1 \end{array}$$

ossia $\mathcal{E}$ è una base ortonormale.

Si mostra in generale che, detta $E_{i,j}$ la matrice $n \times n$ costituita da tutti 0 tranne un 1 ol posto di riga i e colonna j, si ha che

$$E_{i,j}E_{i',j'} = \left\langle \begin{array}{ll} 0 & \text{se } j \neq i' \\ E_{i,j'} & \text{se } j = i' \end{array} \right.$$

e quindi

$$\langle E_{i,j}, E, i', j' \rangle = \operatorname{tr} E_{i,j}{}^t E_{i',j'} = \operatorname{tr} E_{i,j}E_{j',i'} = \left\langle \begin{array}{ll} \operatorname{tr} 0 = 0 & \text{se } j \neq j' \\ \operatorname{tr} E_{i,i'} & \text{se } j = j' \end{array} \right.$$

ma ora

$$\operatorname{tr} E_{i,i'} = \left\langle \begin{array}{ll} 0 & \text{se } i \neq i' \\ 1 & \text{se } i = i' \end{array} \right.$$

e quindi in definitiva

$$\langle E_{i,j}, E, i', j' \rangle = \begin{array}{ll} 0 & \text{se } (i,j) \neq (i',j') \\ 1 & \text{se } (i,j) = (i',j') \end{array}$$

essia le matrici $E_{i,j}$ costituiscono un abase ortonormale dello spazio delle matrici $n \times n$ dotato di tale prodotto scalare. ❑

Soluzione dell'esercizio 5 Essendo una matrice reale 3×3, A ha almeno un autovalore reale λ, ed in più, essendo una matrice ortogonale, necessariamente $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$. Dimostriamo che nelle nostre ipotesi 1 è autovalore di A.

Se $\lambda = 1$, non c'è niente da dimostrare. Se $\lambda = -1$, sia v un autovettore unitario di A relativo all'autovalore -1. Dato che A è ortogonale, $W = \big(\langle v \rangle\big)^{\perp}$ è invariante per A; quindi, presa una base ortonormale $\{v_1, v_2\}$ di W, la matrice associata ad A rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v\}$ ha la forma

$$A_1 = M^{-1}AM = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{B}} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Inoltre, dato che $\mathcal{B}$ è una base ortonormale, la matrice di cambiamento di base M è a sua volta ortogonale, quindi A_1 è ortogonale, da cui segue che anche B è ortogonale.

Poiché $\det A = 1$, si ha che $\det B = -1$ e quindi B è una riflessione ed ha per tanto due autovalori 1 e -1. Dato che gli autovalori di B sono anche autovalori di A, 1 è un autovalore di A.

Nel ragionamento precedente possiamo allora supporre che $\lambda = 1$ e quindi esiste una base ortonormale in cui A assume la forma

$$A_1 = M^{-1}AM = \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{B}} & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

essendo B una matrice ortogonale con $\det B = 1$. Ma allora B è della forma

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

e quindi A risulta essere una rotazione attorno a $\langle v_1 \rangle$ di un angolo θ.

Osserviamo infine che A ed A_1, essendo simili, hanno la stessa traccia, quindi

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A_1 = 1 + \operatorname{tr} B = 1 + 2\cos\theta$$

da cui segue immediatamente la relazione richiesta, che determina a meno del segno l'angolo θ. ❑