Geometria 1

Primo appello, sessione autunnale, 1998/99

9 settembre 1999

Esercizio 1 Siano dati in $\mathbb{R}^2$ i punti $P = (0,1)$, $Q = (0,0)$ e le rette L di equazione $\{x - y = 1\}$ e M di equazione $\{y = \sqrt{2}\}$. Si dimostri che $d(P, L) = d(Q, M)$. Si costruisca un'isometria φ tale che $\varphi(P) = Q$ e $\varphi(L) = M$ e se ne discuta l'unicità.

Esercizio 2 Sia r la retta in $\mathbb{R}^3$ di equazioni

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$$

Si determini un vettore direzione di r. Fra i piani contenenti la retta r si trovi, se esiste:
1) un piano passante per $P = (1, 3, 1)$;
2) un piano parallelo alla retta $s = \{(1, 1, 1) + t(-1, 2, -2) \mid t \in \mathbb{R}\}$;
3) un piano perpendicolare alla retta s.
Si discuta l'unicità dei piani trovati.

Esercizio 3 Siano dati i quattro punti

$$P_1 = (0,0) \qquad P_2 = (0,2) \qquad P_3 = (1,0) \qquad P_4 = (1,1).$$

Si determini il fascio delle coniche per P_1, P_2, P_3 e P_4. Si dica se nel fascio ci sono delle parabole e in tal caso quali sono. Si dica se nel fascio ci sono delle circonferenze e in tal caso quali sono.

Esercizio 4 Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi in una variabile di grado minore o uguale a 2. Si consideri il prodotto scalare definito da

$$\langle P, Q \rangle = P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1) - 4P(0)Q(0).$$

Si dimostri che è non degenere, e si trovi una base ortogonale di V rispetto a tale prodotto.

Esercizio 5 Sia $V = U \oplus W$ uno spazio vettoriale con un prodotto scalare $\langle , \rangle$. Supponiamo inoltre di sapere che, per ogni $u \in U$ e $w \in W$, si ha $\langle u, w \rangle = \langle w, w \rangle = 0$ e che $\langle u, u \rangle > 0$ se $u \neq 0$.

(i) Si dimostri che $\langle , \rangle$ su V è semidefinito positivo.

(ii) Si dimostri che se $w_1, w_2 \in W$ allora $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$. Suggerimento: si consideri $\langle w_1 + w_2, w_1 + w_2 \rangle$.

(iii) Si dimostri che

$$V^{\perp} = W.$$

Soluzioni proposte

Soluzione dell'esercizio 1 La distanza fra un punto (x_0, y_0) e una retta di equazione $ax + by + c = 0$ è data dalla formula

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Si ottiene perciò

$$d(P, L) = 2/\sqrt{2}, \qquad d(Q, M) = \sqrt{2}/1,$$

e quindi $d(P, L) = d(Q, M) = \sqrt{2}$.

Sia σ la riflessione attorno all'asse delle y, allora evidentemente $\sigma(Q) = Q$ e $\sigma(L) = L$, quindi se φ è una isometria con le proprietà richieste, allora anche $\sigma \circ \varphi$ ha le stesse proprietà e $\sigma \circ \varphi \neq \varphi$, quindi se una tale isometria esiste, non è unica.

Una generica isometria che porta il punto P su Q è del tipo

$$\varphi(X) = A(X - P) + Q$$

con A una matrice ortogonale. Se si vuole che $\varphi(L) = M$, allora la matrice A dovrà portare la giacitura di L su quella di M e il vettore $P_0 - P$ sul vettore $Q_0 - Q$ essendo $P_0 \in L$ e $Q_0 \in M$ i punti delle due rette che realizzano la minima distanza rispettivamente da P e Q. Una semplice verifica mostra che $P_0 = (1, 0)$ e $Q_0 = (0, \sqrt{2})$ e che la giacitura della retta L è data da $V_L = \langle(1, 1)\rangle$ mentre la giacitura di M è data da $V_M = \langle(1, 0)\rangle$.

Indichiamo con v_l e v_M dei generatori, di norma unitaria, delle due giacitura, ad esempio $v_L = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ e $v_M = (1, 0)$ e con $u_L = (P_0 - P)/\,\|P_0 - P\| = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ e $v_M = (Q_0 - Q)/\,\|Q_0 - Q\| = (0, 1)$

Le condizioni su A sono allora equivalenti a richiedere che

$$Av_L = v_M \quad \text{e} \quad Au_L = \pm u_M$$

ossia

$$A\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui segue che

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad A = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Si ottengono per tanto esattamente due isometrie che verificano le condizioni richieste e precisamente

$$\varphi_1(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x + y)/\sqrt{2} - \sqrt{2} \\ (x - y)/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

e

$$\varphi_2(x, y) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(x + y)/\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ (x - y)/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Si osservi che ciascuna delle due isometrie trovate è la composizione dell'altra con la riflessione attorno all'asse delle y, che è l'unica riflessione non banale che porta la seconda configurazione su se stessa. ❑

Soluzione dell'esercizio 2 La retta r può essere scritta in forma parametrica come:

$$r = \{(2 - t, 2t + 1, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

e quindi un vettore direzione per r è $v = (-1, 2, 1)$.

Osserviamo che un piano come nel punto 3) non può esistere, infatti se esistesse la direzione di r e la direzione di s dovrebbero essere ortogonali, ma un vettore direzione per s è $w = (-1, 2, -2)$ e $\langle v, w\rangle = 1 + 4 - 2 = 3 \neq 0$.

Il punto P appartiene alla retta r, quindi ogni piano passante per la retta contiene anche P ad esempio il piano di equazione $x + z = 2$. Chiaramente tale piano non è unico.

Date due rette sghembe esiste un unico piano passante per l'una e parallelo all'altra. Le rette r e s sono sghembe, infatti le loro direzioni sono linearmente indipendenti e non hanno intersezione in quanto il sistema

$$\begin{cases} (1-t) + (1-2t) = 2 \\ (1+2t) - 2(1-2t) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 - 2t = 2 \\ -1 + 6t = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 0 \\ t = 1/3 \end{cases}$$

non ha soluzione. Quindi esiste un unico piano come al punto 2). Determiniamolo. L'equazione del fascio di piani passanti per r è data da:

$$\lambda(x + z - 2) + \mu(y - 2z - 1) = 0 \iff \lambda x + \mu y + (\lambda - 2\mu)z = 2\lambda + \mu$$

perché questo piano sia parallelo alla retta s, la sua normale dovrà essere ortogonale alla direzione di s e quindi

$$\langle(\lambda, \mu, \lambda - 2\mu), (-1, 2, -2)\rangle = 0$$

ovvero

$$-3\lambda + 6\mu = 0 \iff \lambda = 2\mu$$

Quindi il piano cercato ha equazione

$$2x + y = 5.$$

❏

Soluzione dell'esercizio 3 Le due coniche di equazioni rispettivamente $x(x-1) = 0$ e $y(x + y - 2) = 0$ si intersecano esattamente nei quattro punti, quindi il fascio ha equazione $\alpha x(x - 1) + \beta y(x + y - 2) = 0$, ovvero

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \beta xy - \alpha x - 2\beta y = 0.$$

La matrice associata alla conica è allora data da:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & \frac{\beta}{2} & -\frac{\alpha}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \beta & -\beta \\ \hline -\frac{\alpha}{2} & -\beta & 0 \end{array}\right)$$

Affinché la conica sia una parabola, dove essere non degenere e avere parte quadratica degenere. Questa seconda condizione è allora data da:

$$0 = \det\begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \beta \end{pmatrix} = \beta(\alpha - \frac{\beta}{4}).$$

Per $\beta = 0$ la conica si riduce a $x(x - 1) = 0$ che è degenere (sono due rette parallele). Per $\beta = 4\alpha$, posto $\alpha = 1$, la matrice della conica si riduce a

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 4 & -4 \\ \hline -\frac{1}{2} & -4 & 0 \end{array}\right)$$

ed un semplice calcolo mostra che ha determinante pari a -9, e quindi la conica è non degenere e per tanto è una parabola.

Per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza. È immediato verificare che la circonferenza passante per i punti P_1, P_2 e P_4 ha equazione $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ e che quindi non contiene il punto P_3. Per tanto nel fascio delle coniche passanti per i 4 punti non possono esserci circonferenze. Alla stessa conclusione si poteva giungere analiticamente, osservando che la condizione affinché una conica sia una circonferenze (parte quadratica di tipo $ax^2 + ay^2$), nel caso della conica del fascio, si riduce a $\alpha = \beta = 0$. ❏

Soluzione dell'esercizio 4 Consideriamo i tre polinomi $Q_1(x) = x^2 - 1$, $Q_2(x) = x(x-1)$ e $Q_3(x) = x(x+1)$. Li abbiamo scelti perché ognuno si annulla esattamente in due tra i punti $-1, 1, 0$. Se $P \in V^{\perp}$ allora

$$\begin{aligned} 0 &= \langle P, Q_1 \rangle = -4P(0)Q_1(0) = 4P(0) \\ 0 &= \langle P, Q_2 \rangle = P(-1)Q_2(-1) = 2P(-1) \\ 0 &= \langle P, Q_3 \rangle = P(1)Q_3(1) = 2P(1) \end{aligned}$$

e quindi $P(0) = P(1) = P(-1) = 0$, ma l'unico polinomio di grado minore o uguale a 2 con tre radici distinte è il polinomio identicamente nullo, quindi $V^{\perp} = \langle 0 \rangle$ e quindi $\langle , \rangle$ è non degenere.

Osserviamo che i tre polinomi Q_1, Q_2 e Q_3 costituiscono anche una base ortogonale. Per come sono costruiti, comunque se ne fissino due diversi almeno uno dei due si annulla su 0, almeno uno si annulla su 1 e almeno uno si annulla su -1, quindi $\langle Q_i, Q_j \rangle = 0$ ogni volta che $i \neq j$. D'altra parte nessuno dei tre è il polinomio nullo ed è ben noto che $\dim V = 3$.

La soluzione proposta fa uso di una scelta opportuna dei tre polinomi Q_i. Chiaramente si poteva partire dalla base standard di V data dai polinomi $E_0(x) = 1$, $E_1(x) = x$ e $E_2(x) = x^2$ ed esprimere la condizione di essere ortogonale a tutto lo spazio con $\langle P, E_i \rangle = 0$, ottenendo in tal modo un sistema lineare nelle incognite $P(0)$, $P(1)$ e $P(-1)$ che ammette solo la soluzione nulla.

Sempre a partire da tale base si poteva poi usare la costruzione standard (metodo di Jacobi) per ottenere una base ortogonale di V. ❑

Soluzione dell'esercizio 5 (i). Sia $v \in V$ esistono allora $u \in U$ e $w \in W$ tali che $v = u + w$. Ma allora

$$\langle v, v \rangle = \langle u + w, u + w \rangle = \langle u, u \rangle + \langle w, w \rangle + 2\langle u, w \rangle = \langle u, u \rangle \geq 0.$$

(ii). Siano $w_1, w_2 \in W$ allora

$$0 = \langle w_1 + w_2, w_1 + w_2 \rangle = \langle w_1, w_1 \rangle + \langle w_2, w_2 \rangle + 2\langle w_1, w_2 \rangle = 2\langle w_1, w_2 \rangle$$

da cui la tesi.
(iii). Sia $v = u + w \in V^{\perp}$ con $u \in U$ e $w \in W$, allora

$$0 = \langle v, u \rangle = \langle u + w, u \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, w \rangle = \langle u, u \rangle \Rightarrow u = 0$$

quindi $v = w \in W$, ossia $V^{\perp} \subseteq W$.

D'altra parte se $w \in W$ e $v = u + w' \in V$ si ha che

$$\langle w, v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, w' \rangle = 0 + 0 = 0$$

e quindi anche $W \subseteq V^{\perp}$, da cui la tesi. ❑