Geometria 1

Secondo appello, sessione autunnale, 1998/99

29 settembre 1999

Si ricorda che, anche se non esplicitamente richiesto nei testi, tutte le risposte alle domande devono essere adeguatamente *motivate* con dimostrazioni o confutazioni.

Esercizio 1 Siano dati in $\mathbb{R}^2$ le rette:

$$\begin{array}{ll} L = \{x + y = 1\} & M = \{x - y = 1\} \\ L' = \{y = 1\} & M' = \{y - 2x = 1\} \end{array}$$

Si determini, se e siste, una affinità φ tale che $\varphi(L) = L'$ e $\varphi(M) = M'$. Tale affinità è unica? Esiste una isometria con le stesse proprietà?

Esercizio 2 Sia r la retta in $\mathbb{R}^3$ di equazioni

$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ y - 3z = 1 \end{cases}$$

Si determini un vettore direzione di r. Fra i piani contenenti la retta r si trovi, se esiste:

1. un piano parallelo alla retta $s = \{t(2, -3, -1) + (1, 1, 1)\}$;
2. un piano parallelo al piano $\Pi = \{x + y + z = 5\}$;
3. un piano perpendicolare al piano Π.

Si discuta l'unicità dei piani trovati.

Esercizio 3 Siano dati i quattro punti

$$P_1 = (0, 0) \qquad P_2 = (2, 2) \qquad P_3 = (2, 1) \qquad P_4 = (1, 0).$$

Si determini il fascio delle coniche per P_1, P_2, P_3 e P_4. Si dica se nel fascio ci sono delle parabole e in tal caso quali sono. Si dica se nel fascio ci sono delle circonferenze e in tal caso quali sono.

Esercizio 4 Si consideri il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ definito dalla seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se ne determini la segnatura ed una base ortogonale.

Esercizio 5 Sia V uno spazio vettoriale reale con un prodotto scalare $\langle , \rangle$ non degenere. Sia $F : V \to V$ un operatore lineare e sia F^* il suo aggiunto. Si provi che $\ker F^* = (F(V))^{\perp}$.

Soluzioni proposte

Soluzione dell'esercizio 1 Le rette L e M sono incidenti nel punto $P = (1, 0)$ e le rette L' e M' sono incidenti nel punto $P' = (0, 1)$. Per ottenere un'affinità con le proprietà richieste è sufficiente determinarne una tale che $\varphi(P) = P'$ e tale che la sua parte lineare porti le direzioni delle rette L e M in quelle di L' e M' cosa che è possibile, perché tali direzioni sono indipendenti. Dei vettori direzione per le rette L, M , L', M' sono rispettivamente:

$$\begin{array}{rclcrcl} v &=& (1,-1), & \quad & w &=& (1,1) \\ v' &=& (1,0), & \quad & w' &=& (1,2) \end{array}$$

L'applicazione lineare che porti v su v' e w su w' è allora data dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ma allora l'affinità cercata sarà $\varphi(X) = A(X - P) + P' = AX + P' - AP$, ossia

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x-1 \\ x+y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'affinità cercata non è unica. Diverse scelte dei vettori direzione delle rette portano alla costruzione di una diversa affinità con la stessa proprietà, ad esempio scegliendo

$$\begin{array}{rclcrcl} v &=& (1,-1), & \quad & w &=& (1,1) \\ v' &=& (1,0), & \quad & w' &=& (2,4) \end{array}$$

come vettori direzione, si ottiene l'affinità $\varphi(x, y) = (3x/2+y/2-3/2, 2x+2y-1)$, che è diversa dalla precedente.

Una isometria con le proprietà volute non può esistere in quanto le due rette L e M sono ortogonali, mentre L' e M' no ($\langle v, w\rangle = 0$, mentre $\langle v', w'\rangle = 1 \neq 0$). ❑

Soluzione dell'esercizio 2 La retta r può essre scritta in forma parametrica come $\{t(-2, 3, 1) + (3, 1, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$ e quindi un vettore direzione per r è il vettore $v = (-2, 3, 1)$.
1. La retta s è parallela alla retta r (hanno la stessa direzione e non coincidono in quanto è immediato che $(1, 1, 1) \in s$ ma $(1, 1, 1) \notin r$) quindi ogni piano passante per r, tranne quello che contiene s ha la proprietà cercata, ad esempio il piano di equazione $y - 3z = 1$ (non contiene s in quanto non contiene il punto $(1, 1, 1)$).
2. Se Σ è un piano contenente r e parallelo a Π, allora la direzione di r è ortogonale alla normale a Σ, che coincide con la normale a Π. Ma una normale a Π è il vettore $w = (1, 1, 1)$ e $\langle v, w\rangle = -2 + 3 + 1 = 2 \neq 0$, quindi un siffatto piano Σ non esiste.
3. Il fascio di piani passante per r ha equazione

$$\alpha(x + 2z - 3) + \beta(y - 3z - 1) = 0$$

ossia $\alpha x + \beta y + (2\alpha - 3\beta)z = 3\alpha + \beta$ che ha per normale il vettore $u_{\alpha,\beta} = (\alpha, \beta, 2\alpha-3\beta)$. Perché un tale piano risulti normale a Π dovrà risultare $\langle u_{\alpha,beta}, w\rangle = 0$ ossia

$$0 = \langle(\alpha, \beta, 2\alpha - 3\beta), (1, 1, 1)\rangle = 3\alpha - 2\beta$$

ovvero $(\alpha, \beta) = \lambda(2, 3)$. Il piano cercato esiste ed è unico ed ha equazione $2x + 3y - 5z = 9$. ❑

Soluzione dell'esercizio 3 Il fascio di coniche ha equazione

$$\alpha y(x-2)+\beta(y-x)(y-x+1)=0$$

ossia

$$\beta x^2+\beta y^2+(\alpha-2\beta)xy-\beta x+(\beta-2\alpha)y=0$$

La matrice di questa conica è data da:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \beta & (\alpha-2\beta)/2 & -\beta/2 \\ (\alpha-2\beta)/2 & \beta & (\beta-2\alpha)/2 \\ \hline -\beta/2 & (\beta-2\alpha)/2 & 0 \end{array}\right)$$

Il determinante della parte quadratica è $\beta^2-(\alpha-2\beta)^2/4=-\alpha(\alpha-4\beta)/4$ che si annulla se e solo se $\alpha=0$ oppure $\alpha=4\beta$. Se $\alpha=0$ la conica è una coppia di rette parallele ($(y-x)(y-x+1)=0$), se $\alpha=4$ e $\beta=1$ la matrice della conica si riduce invece a:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1/2 \\ 1 & 1 & -7/2 \\ \hline -1/2 & -7/2 & 0 \end{array}\right)$$

che ha determinante pari a -9 e quindi è non degenere, la conica e per tanto una parabola.

Perché la conica sia una circonferenza deve aversi $(\alpha-2\beta)/2=0$ e quindi $\alpha=2$ e $\beta=1$, nel qual caso la matrice diventa

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ \hline -1/2 & -3/2 & 0 \end{array}\right)$$

che ha determinante $-5/2\neq 0$ e quindi è non degenere, la conica e per tanto una circonferenza. ❑

Soluzione dell'esercizio 4 Sia e_1, e_2 e e_3 i vettori della base standard di $\mathbb{R}^3$ rispetto a cui è scritta la matrice del prodotto scalare ed usiamo il metodo di Jacobi per la determinazione di una base ortogonale.

Poniamo

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1 \\ v_2 &= e_2-\frac{\langle e_2,e_1\rangle}{\langle e_1,e_1\rangle}e_1=e_2-2e_1 \\ v_3 &= e_3-\frac{\langle e_3,e_1\rangle}{\langle e_1,e_1\rangle}e_1=e_3+e_1 \end{aligned}$$

risulta:

$$\begin{aligned} \langle v_2,v_2\rangle &= \langle e_2,e_2\rangle+4\langle e_1,e_1\rangle-4\langle e_1,e_2\rangle=4+4-8=0 \\ \langle v_2,v_3\rangle &= \langle e_2,e_3\rangle-2\langle e_1,e_1\rangle+\langle e_1,e_2\rangle-2\langle e_1,e_3\rangle=1-2+2+2=3 \\ \langle v_3,v_3\rangle &= \langle e_3,e_3\rangle+\langle e_1,e_1\rangle+2\langle e_1,e_2\rangle=1+1-2=0 \end{aligned}$$

Quindi rispetto a questa base la matrice associata al prodotto scalare è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora la base

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 \\ w_2 &= v_2-v_3 \\ w_3 &= v_2+v_3 \end{aligned}$$

risulta:

$$\begin{aligned}
\langle w_2, w_2\rangle &= \langle v_2, v_2\rangle + \langle v_3, v_3\rangle - 2\langle v_2, v_3\rangle = -6 = 0 \\
\langle w_2, w_3\rangle &= \langle v_2, v_2\rangle - \langle v_3, v_3\rangle = 0 \\
\langle w_3, w_3\rangle &= \langle v_2, v_2\rangle + \langle v_3, v_3\rangle + 2\langle v_2, v_3\rangle = 6
\end{aligned}$$

Quindi rispetto a questa base la matrice associata al prodotto scalare è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

L'indice di positività del prodotto scalare è 2 e quello di negatività è -1, e la base

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1 = e_1 = (1,0,0) \\
w_2 &= v_2 - v_3 = e_2 - 3e_1 - e_3 = (-3,1,-1) \\
w_3 &= v_2 + v_3 = e_2 - e_1 + e_3 = (-1,1,1)
\end{aligned}$$

è una base ortogonale. ❑

Soluzione dell'esercizio 5 Proviamo le due inclusioni.
$\ker F^* \subseteq (F(V))^\perp$. Sia $u \in \ker F^*$ e sia $w \in F(V)$, allora esiste $v \in V$ tale che $F(v) = w$ e quindi:

$$\langle u, w\rangle = \langle u, F(v)\rangle = \langle F^*(u), v\rangle = \langle 0, v\rangle = 0$$

e quindi per l'arbitrarietà di $W \in F(V)$ si ha che $u \in (F(V))^\perp$.
$\ker F^* \supseteq (F(V))^\perp$. Sia $u \in (F(V))^\perp$, allora, per ogni $v \in V$ si ha che $\langle u, F(v)\rangle = 0$, e quindi $\langle F^*(u), v\rangle = 0$ per ogni $v \in V$. Dato che il prodotto scalare è non degenere, ciò implica che $F^*(u) = 0$ ossia che $u \in \ker F^*$. ❑