Geometria 1

Primo appello, sessione invernale, a.a. 1998/99

9 febbraio 2000

Si ricorda che, anche se non esplicitamente richiesto nei testi, tutte le risposte alle domande devono essere adeguatamente *motivate* con dimostrazioni o confutazioni.

Esercizio 1 Siano dati in $\mathbb{R}^2$ le rette:

$$\begin{array}{lll} L_1 = \{x + y = 2\} & L_2 = \{x = 1\} & L_3 = \{y = 0\} \\ M_1 = \{y = 2x\} & M_2 = \{y - 2x = 1\} & M_3 = \{x + 2y = 1\} \\ N_1 = \{y + 2x = 1\} & N_2 = \{3y - x = 3\} & N_3 = \{4y + x + 3 = 0\} \end{array}$$

Dire se esiste

1. un'affinità φ di $\mathbb{R}^2$ tale che $\varphi(L_i) = M_i$ per ogni i;
2. un'affinità φ di $\mathbb{R}^2$ tale che $\varphi(L_i) = N_i$ per ogni i.

In caso di risposta affermativa la si determini e se ne discuta l'unicità.

Esercizio 2 Siano r e s le rette in $\mathbb{R}^3$ definite da:

$$r := \begin{cases} x + z = 2 \\ 2y - z = 1 \end{cases} \qquad s := \{(1,1,-1) + t(1,2,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

e $P = (1,2,1)$. Dire se esiste:

1. una retta passate per P e parallela a r e s;
2. una retta passante per P ed incidente a r e s.

In caso di risposta affermativa la si determini e se ne discuta l'unicità.

Esercizio 3 Siano dati i quattro punti

$$P_1 = (0,0) \qquad P_2 = (3,2) \qquad P_3 = (0,2) \qquad P_4 = (1,0).$$

Si determini il fascio delle coniche per P_1, P_2, P_3 e P_4. Tra le coniche di tale fascio si determini quella passante per il punto $P_5 = (1,1)$ e se ne studi il tipo affine.

Esercizio 4 Nello spazio vettoriale reale V dei polinomi di grado minore o uguale a 2 si consideri il prodotto scalare definito da:

$$\langle P, Q\rangle = 2P(1)Q(1) + P(0)Q(0) - 2P(-1)Q(-1)$$

Se ne determinino la segnatura ed una base ortogonale.

Esercizio 5 Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita, $v_1, \ldots, v_k \in V$ e sia $\langle , \rangle$ il prodotto scalare su V^* (il duale di V) definito da

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i=1}^{k} f(v_i)g(v_i).$$

Si provi che

1. $\langle , \rangle$ è semidefinito positivo:
2. $\langle f, g\rangle = 0$ per ogni $g \in V^*$ se e solo se $\ker f \supseteq \langle v_1, \ldots, v_k\rangle$:
3. $\langle , \rangle$ è definito positivo se e solo se $\{v_1, \ldots, v_k\}$ è un sistema di generatori di V.

Soluzioni proposte

Soluzione dell'esercizio 1 Osserviamo che le tre rette L_i sono a due a due incidenti e i punti di intersezione sono dati da:

$$\begin{array}{rcll} P_0 & = & (1,0) & (L_2 \cap L_3) \\ P_1 & = & (2,0) & (L_1 \cap L_3) \\ P_2 & = & (1,1) & (L_1 \cap L_2) \end{array}$$

Le due rette M_1 e M_2 sono parallele, quindi non può esistere alcuna affinità che porti L_1 su M_1 e L_2 su M_2.

Le tre rette N_i sono anch'esse a due a due incidenti e i tre punti di intersezione sono:

$$\begin{array}{rcll} Q_0 & = & (-3,0) & (N_2 \cap N_3) \\ Q_1 & = & (1,-1) & (N_1 \cap N_3) \\ Q_2 & = & (0,1) & (N_1 \cap N_2) \end{array}$$

Sia i punti P_1 che i Q_i sono in posizione generica (non sono allineati) e quindi esiste una unica affinità φ tale che $\varphi(P_i) = Q_i$ per ogni i. D'altra parte, visto che un'affinit'à porta rette in rette, tale affinità dovrà necessariamente portare ogni L_i su N_i (la retta per P_i e P_j viene portata sulla retta per Q_i e Q_j. D'altra parte, un'affinità che porti ogni retta L_i su Ni dovrà necessariamente portare i punti di intersezione delle rette L_i nei punti di intersezione delle corrispondenti rette N_i e quindi, per quanto detto sopra, una tale affinità è unica.

Costruiamola. Siano

$$\begin{array}{rcl} v_1 & = & P_1 - P_0 = (1,0) \\ v_2 & = & P_2 - P_0 = (0,1) \\ w_1 & = & Q_1 - Q_0 = (4,-1(\\ w_2 & = & Q_2 - Q_0 = (-3,1) \end{array}$$

L'applicazione lineare che porta v_i su w_i è allora definita dalla matrice $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e quindi l'affinità è del tipo:

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Per determinare b_1 e b_2 imponiamo che $\varphi(P_0) = Q_0$ e otteniamo:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = Q_0 - \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} P_0 = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

❏

Soluzione dell'esercizio 2 Esplicitando il sistema rispetto alla variabile y si trova la seguente forma parametrica della retta r:

$$r = \{(3,0,-1) + t(-2,1,2) : t \in \mathbb{R}\}$$

dato che i vettori direzione delle due rette sono linearmente indipendenti, non può esistere una retta che sia parallela ad entrambe.

Determiniamo una retta passante per P ed incidente ad entrambe. Osserviamo che se una tale retta esiste, deve essere contenuta nell'intersezione dei due piani Π, passante per P e contenente R, e Σ, passante per P e contenente s. Determiniamo questi due piani:

Il fascio di piani per r è dato da $\alpha(x+z-2)+\beta(2y-z-1) = 0$ che contiene il punto P se e solo se $\beta = 0$ e quindi Π ha equazione $x + z - 2 = 0$.

Equazioni cartesiane della retta s sono date da:

$$\begin{cases} x - z = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Quindi il fascio di piani per s è dato da: $\alpha(x-z-2)+\beta(2x-y-1)=0$ che contiene il punto P se e solo se $-2\alpha-\beta=0$ e quindi il piano Σ ha equazione $3x-2y+z=0$.

L'intersezione dei due piani è data da:

$$\begin{cases} x+z-2=0 \\ 3x-2y+z=0 \end{cases}$$

Evidentemente questo sistema ha rango 2 e quindi descrive una retta R, quindi se una retta passante per P ed incidente alle due rette date esiste, allora deve coincidere con questa$R$. Proviamo che effettivamente R è incidente sia a r che a s.

Intersechiamo R con r:

$$\begin{cases} x+z-2=0 \\ 3x-2y+z=0 \\ x+z=2 \\ 2y-z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+z-2=0 \\ 3x-2y+z=0 \\ 2y-z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1/3 \\ y=4/3 \\ z=5/3 \end{cases}$$

Intersechiamo R con s:

$$\begin{cases} x+z-2=0 \\ 3x-2y+z=0 \\ x=t+1 \\ y=2t+1 \\ z=t-1 \end{cases} \iff \begin{cases} t+1+t=1-2=0 \\ 3t+3-4t-2+t-1=0 \\ x=t+1 \\ y=2t+1 \\ z=t-1 \end{cases} \iff \begin{cases} t=1 \\ x=2 \\ y=3 \\ z=0 \end{cases}$$

Per tantola retta R è effettivamnente incidente sia a r che a s. ❑

Soluzione dell'esercizio 3 Consideriamo le due coniche degeneri date dalle coppie di rette passanti rispettivamente per P_1P_3 e P_2P_4 e per P_1P_4 e P_2P_3, che hanno equazione rispettivamente:

$$x(x-y-1)=0 \quad \text{e} \quad y(y-2)=0$$

Il fascio di coniche ha allora equazione:

$$\alpha x(x-y-1)+\beta y(y-2)=0.$$

Perché il punto P_5 appartenga alla conica deve aversi $-\alpha-\beta=0$, quindi la conica cercata, che è unica, ha equazione:

$$x^2-y^2-xy-x+2y=0.$$

La matrice della conica è data da:

$$A=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1 & 1 \\ \hline -1/2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Un semplice calcolo mostra che $\det A=-1/4\neq 0$, per cui la conica è non degenede, e $\det A_i nfty=-5/4<0$ e quindi la conica è un'iperbole. ❑

Soluzione dell'esercizio 4 Usiamo il metodo di Jacobi. Consideriamo la base standard dei polinomi, $E_1=1, E_2=x, E_3=x^2$, rispetto a tale base la matrice del prodotto scalare è data da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

. Dato che $\langle E_1, E_1\rangle = 1$ possiamo considerare la nuova base:

$$\begin{array}{rcl} P_1 & = & E_1 \\ P_2 & = & E_2 - \frac{\langle E_2, E_1\rangle}{\langle E_1, E_1\rangle} E_1 = E_2 - 4E_1 = x - 4 \\ P_3 & = & E_3 - \frac{\langle E_3, E_1\rangle}{\langle E_1, E_1\rangle} E_1 = E_3 = x^2 \end{array}$$

Rispetto a questa nuova base la matrice del prodotto scalare diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Poniamo ora

$$\begin{array}{rcl} Q_1 & = & P_1 = 1 \\ Q_2 & = & P_2 = x - 4 \\ Q_3 & = & P_3 - \frac{\langle P_3, P_2\rangle}{\langle P_2, P_2\rangle} P_2 = P_3 - \frac{1}{4} P_2 = x^2 - \frac{1}{4}x + 1 \end{array}$$

e otteniamo in tal modo una base ortogonale. La matrice rispetto a tale base è data da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

quindi l'indice di positività è 1 e quello di negatività è 2. ❑

Soluzione dell'esercizio 5 *1.* Se $f \in V^*$ allora

$$\langle f, f\rangle = \sum_{i=1}^{k} f(v_i)^2 \geq 0.$$

qyuindi $\langle , \rangle$ è semidefinito positivo.
2. Indichiamo con $W = \langle v_1, \ldots, v_k\rangle$. Chiaramente se $\ker f \supseteq W$ allora $f(v_i) = 0$ per ogni i e quindi, per ogni $g \in V^*$ si ha

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i=1}^{k} f(v_i)g(v_i) = \sum_{i=1}^{k} 0g(v_i) = 0.$$

Viceversa, supponiamo che $\langle f, g\rangle = 0$ per ogni g. Dimostriamolo prima per il caso in cui i v_i siano linearmente indipendenti. Se i v_i sono indipendenti, allora per ogni j esiste un funzionale $g_j \in V^*$ tale che

$$g_j(v_i) = \left\langle \begin{array}{ll} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{array} \right.$$

(ad esempio si estenda $\{v_1, \ldots, v_k\}$ ad una base di V e se ne prenda la base duale. Ma allora

$$0 = \langle f, g_j\rangle = \sum_{i=1}^{k} f(v_i)g_j(v_i) = f(v_j) \qquad \forall j = 1, \ldots, k$$

e quindi $\ker f \supseteq W$.

Vediamo ora il caso generale. Estraiamo da $\{v_1, \ldots, v_k\}$ una base di W. Possima supporre, a meno di rinumerare i vettori, che i primi s dei v_i costituiscano una tale base. Ogni altro dei v_i si scriverà come combinazione lineare di questi, ossia:

$$v_{s+i} = \sum_{h=1}^{s} \alpha_{ih} v_h \qquad i = 1, \ldots, k - s.$$

Siano $g_j \in V^*$ definiti come prima, rispetto a $v_1, \ldots, v_s$, allora per ogni $j = 1, \ldots, s$ si ha:

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & \langle f, g_j \rangle = \sum_{i=1}^{k} f(v_i) g_j(v_i) = \sum_{i=1}^{s} f(v_i) g_j(v_i) + \sum_{i=1}^{k-s} f(v_{s+i}) g_j(v_{s+i}) = \\ & f(v_j) + \sum_{i=1}^{k-s} f(\sum_{h=1}^{s} \alpha_{ih} v_h) g_j(\sum_{h=1}^{s} \alpha_{ih} v_h) = \\ & f(v_j) + \sum_{i=1}^{k-s} (\sum_{h=1}^{s} \alpha_{ih} f(v_h))(\sum_{h=1}^{s} \alpha_{ih} g_j(v_h)) = \\ & f(v_j) + \sum_{i=1}^{k-s} (\sum_{h=1}^{s} \alpha_{ih} f(v_h)) \alpha_{ij} \end{aligned}$$

Detti $A = (\alpha_{ij})$ e $w = \in \mathbb{R}^s$ il vettore la cui j-esima componente è $f(v_j)$, allora la relazione appena ottenuta si può riscrivere

$$0 = w + {}^t\!AAw$$

da cui, moltiplicando scalarmente per w (rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^s$), segue che

$$0 = w \cdot w + w \cdot {}^t\!AAw = w \cdot w + (Aw) \cdot (Aw).$$

Poiché i due addendi sono non negativi, affinché la loro somma sia nulla devono entrambi essere nulli. In particolare $w \cdot w = 0$ e quindi $w = 0$. Ma ciò significa che $f(v_j) = 0$ per ogni $j = 1, \ldots, s$. Dato che i $v_1, \ldots, v_s$ sono una base di W questo significa che $\ker f \supseteq W$.

3. Osserviamo che:

$$\langle f, f \rangle = 0 \iff \sum_{i=1}^{k} f(v_i)^2 = 0 \iff f(v_i) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, k$$

e quindi, se $\{v_1, \ldots, v_k\}$ è un sistema di generatori di V, ciò implica che $f(v) = 0$ per ogni $v \in V$ e quindi $f = 0$.

Viceversa, supponiamo che $\langle , \rangle$ sia definito positivo ma che $\{v_1, \ldots, v_k\}$ non sia un sistema di generatori di V. Detto $W = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$, esisterebbe allora un funzionale non nullo tale che $f|_W = 0$, ma allora $\langle f, f \rangle = 0$, contro l'assunto che $\langle , \rangle$ sia definito positivo. ❏