Il procedimento diagonale di Cantor

Domenico Luminati

11 gennaio 2002

Teorema 0.1 (Cantor). *Ogni funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ non è suriettiva.*

Dimostrazione. Data $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\{\epsilon_i^{(n)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ la successione delle cifre decimali dello sviluppo decimale infinito di $f(n)$. Ossia ogni $\epsilon_i^{(n)}$ è un numero naturale tra 0 e 9. Sia $\delta : \mathbb{N} \to \{1, 2\}$ la funzione definita da

$$\delta(m) = \begin{cases} 1 & \text{se } m \text{ è pari} \\ 2 & \text{se } m \text{ è dispari} \end{cases}$$

Sia x il numero reale che ha per sviluppo decimale infinito la successione $\{\delta(\epsilon_i^{(i)})\}_{i \in \mathbb{N}}$. Questo numero è diverso da tutti gli $f(n)$, dato che per ogni n si ha che la n-esima cifra decimale di x e la n-esima cifra decimale di $f(n)$ sono diverse (una è pari e l'altra è dispari) e questo, per l'unicità dello sviluppo decimale infinito, basta a provare che $x \neq f(n)$.

$$\begin{array}{lll}
f(1) = & 0\ . & 8\ 9\ 2\ 2\ 7\ 0\ 1\ 2\ 0\ 7\ 9\ 3\ 9\ 3\ 0\ 7\ 7\ 0\ 0\ 9\ 3\ 7\ 4\ 8\ \ldots \\
f(2) = & 0\ . & 0\ 9\ 7\ 2\ 5\ 9\ 2\ 9\ 2\ 7\ 7\ 1\ 6\ 0\ 4\ 8\ 0\ 3\ 6\ 5\ 2\ 2\ 9\ 2\ \ldots \\
f(3) = & 0\ . & 2\ 7\ 0\ 5\ 5\ 1\ 7\ 2\ 2\ 7\ 4\ 4\ 9\ 7\ 5\ 0\ 0\ 4\ 4\ 5\ 4\ 0\ 2\ 0\ \ldots \\
f(4) = & 0\ . & 9\ 5\ 6\ 6\ 4\ 4\ 4\ 1\ 8\ 9\ 5\ 9\ 0\ 1\ 3\ 7\ 5\ 3\ 1\ 1\ 5\ 4\ 0\ 6\ \ldots \\
f(5) = & 0\ . & 6\ 1\ 5\ 7\ 2\ 9\ 5\ 6\ 7\ 0\ 8\ 0\ 1\ 8\ 8\ 0\ 1\ 1\ 7\ 7\ 6\ 0\ 9\ 5\ \ldots \\
f(6) = & 0\ . & 8\ 4\ 3\ 0\ 4\ 2\ 5\ 8\ 4\ 2\ 1\ 2\ 5\ 7\ 5\ 5\ 3\ 8\ 8\ 9\ 1\ 5\ 8\ 9\ \ldots \\
f(7) = & 0\ . & 0\ 8\ 4\ 1\ 8\ 2\ 9\ 7\ 9\ 7\ 9\ 9\ 3\ 2\ 9\ 2\ 9\ 0\ 4\ 1\ 7\ 0\ 0\ 8\ \ldots \\
f(8) = & 0\ . & 8\ 3\ 6\ 3\ 1\ 7\ 9\ 2\ 2\ 8\ 2\ 0\ 6\ 9\ 4\ 7\ 0\ 0\ 8\ 9\ 7\ 2\ 9\ 1\ \ldots \\
f(9) = & 0\ . & 3\ 5\ 7\ 4\ 7\ 8\ 9\ 6\ 5\ 7\ 5\ 8\ 1\ 2\ 0\ 9\ 0\ 8\ 3\ 8\ 1\ 2\ 8\ 3\ \ldots \\
f(10) = & 0\ . & 7\ 8\ 8\ 1\ 1\ 8\ 7\ 7\ 0\ 4\ 4\ 2\ 1\ 8\ 5\ 2\ 3\ 8\ 9\ 2\ 6\ 3\ 9\ 5\ \ldots \\
f(11) = & 0\ . & 0\ 3\ 0\ 9\ 5\ 7\ 0\ 3\ 7\ 5\ 6\ 2\ 9\ 1\ 0\ 6\ 7\ 9\ 8\ 3\ 3\ 9\ 1\ 7\ \ldots \\
f(12) = & 0\ . & 8\ 3\ 4\ 4\ 7\ 0\ 4\ 8\ 1\ 3\ 5\ 6\ 5\ 6\ 4\ 2\ 2\ 0\ 7\ 9\ 6\ 2\ 4\ 9\ \ldots \\
f(13) = & 0\ . & 2\ 0\ 2\ 6\ 2\ 7\ 6\ 8\ 5\ 1\ 7\ 7\ 3\ 1\ 8\ 8\ 2\ 6\ 4\ 9\ 3\ 6\ 4\ 0\ \ldots \\
f(14) = & 0\ . & 6\ 0\ 6\ 2\ 7\ 6\ 1\ 4\ 4\ 5\ 0\ 3\ 1\ 8\ 7\ 2\ 1\ 7\ 3\ 2\ 5\ 9\ 8\ 4\ \ldots \\
f(15) = & 0\ . & 0\ 8\ 0\ 2\ 6\ 5\ 3\ 8\ 6\ 8\ 1\ 3\ 2\ 2\ 7\ 7\ 7\ 0\ 6\ 0\ 3\ 2\ 5\ 2\ \ldots \\
f(16) = & 0\ . & 0\ 4\ 3\ 1\ 4\ 2\ 8\ 7\ 6\ 3\ 1\ 2\ 8\ 0\ 6\ 5\ 5\ 2\ 1\ 5\ 8\ 3\ 8\ 9\ \ldots \\
\vdots & & \\
x = & 0\ . & 1\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 1\ 2\ 1\ 1\ 1\ 2\ 1\ 2\ 2\ \ldots
\end{array}$$

$\square$

Lo stesso procedimento può essere utilizzato per provare che le parti dei numeri naturali non sono numerabili.

Teorema 0.2. *Ogni funzione $f : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$ non è suriettiva.*

Dimostrazione. Un sottinsieme A di $\mathbb{N}$, può essere descritto da una successione $\{\epsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ costituita da 1 e 0, basta porre

$$\epsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in A \\ 0 & \text{se } i \notin A \end{cases}$$

Chiaramente la corrispondenza tra parti di $\mathbb{N}$ e successioni di 0 e 1 è biunivoca (dimostrarlo!).

Sia allora $f : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$ e per ogni n sia $\{\epsilon_i^{(n)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ la successione che rappresenta $f(n)$. Detta $\delta : \{0,1\} \to' \{0,1\}$ la funzione definita da

$$\delta(0) = 1 \qquad \delta(1) = 0$$

si consideri la successione $\{\epsilon_i\}$ ottenuta ponendo $\epsilon_i = \delta(\epsilon_i^i)$ per ogni i. Come nel caso precedente, la successione ϵ_i è diversa da tutte le precedenti, e quindi definisce un insieme diverso da tutti gli $f(n)$. ❑

Osservazione 0.3. In realtà si può dimostrare che $\mathbb{R}$ e $2^{\mathbb{N}}$ sono in bigezione.

Osservazione 0.4. Osserviamo che l'insieme A definito dalla successione ϵ_i nella dimostarzione precedente, può essere descritto anche in un altro modo:

$$A = \{i \in \mathbb{N} \mid i \notin f(i)\}$$

dato che

$$i \in A \iff \epsilon_i = 1 \iff \epsilon_i^{(i)} = 0 \iff i \notin f(i).$$

Questa descrizione, permette di generalizzare il teorema appena dimostrato:

Teorema 0.5 (Cantor). *Se X è un insieme, allora ogni funzione $f : X \to 2^X$ non è suriettiva.*

Dimostrazione. Sia $f : X \to 2^X$ e si consideri l'insieme

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}.$$

Proviamo che A non è nell'immagine di f. Infatti se $A = f(z)$ si ha un assurdo. Infatti, per definizione di A, $z \in A$ se e solo se $z \notin f(z) = A$. ❑