Matematica Discreta

Prova informale

25 marzo 1999

Da svolgersi in 2 ore senza l'ausilio di libri o appunti.

Esercizio 1 Siano F_i i numeri di Fibonacci. Si provi che

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

Esercizio 2 Si trovino le soluzioni del sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 2 & \mod 113 \\ x \equiv 87 & \mod 84 \end{cases}$$

Esercizio 3 Per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$ sia $x * y = x + y - xy$. Dire, giustificando la risposta, se $(\mathbb{Q}, *)$ è un semigruppo oppure un monoide oppure un gruppo.

Esercizio 4 Si dimostri che $\{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 1\}$ è un sottogruppo di S_n.

Esercizio 5 Si dimostri che l'insieme $G = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Q}^* \text{ e } b \in \mathbb{Q}\}$ dotato dell'operazione

$$(a, b)(c, d) = (ac, ad + b)$$

è un gruppo. (Si ricorda che $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$)

Detti

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(a, b) \in G \mid a = 1\} \\ X_2 &= \{(a, b) \in G \mid b \in \mathbb{Z}\} \\ X_3 &= \{(a, b) \in G \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

si dica quali tra X_1, X_2 e X_3 sono sottogruppi e quali no.

Esercizio 6 Sia X un insieme e siano $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$. Si provi che allora

$$A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n = \{x \mid x \in A_i \text{ per un numero dispari di } i\}$$

essendo $\triangle$ la differenza simmetrica (i.e. $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$).
[Suggerimento: si usi l'induzione su n]

Soluzioni proposte

Soluzione dell'esercizio 1 Procediamo per induzione su n. Sia $n = 1$, dato che, $F_3 = 2$ e $F_1 = F_2 = 1$, si ha $\sum_{i=1}^{1} F_i = F_1 = 1 = 2 - 1 = F_3 - 1$.

Supponiamo la tesi vera per n e proviamola per $n + 1$.

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_i = \sum_{i=1}^{n} F_i + F_{n+1} = F_n - 1 + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$$

dove la seconda uguaglianza segue dall'ipotesi di induzione, e l'ultima dalla definizione dei numeri di Fibonacci. ❑

Soluzione dell'esercizio 2 Poiché $87 \equiv 3 \mod 84$, la seconda congruenza è equivalente a $x \equiv 3 \mod 84$, e quindi il sistema equivale a:

$$\begin{cases} x \equiv 2 & \mod 113 \\ x \equiv 3 & \mod 84 \end{cases}$$

Tale sistema ha soluzione se e solo se $(113, 84) \mid (3 - 2) = 1$. Usiamo l'algoritmo di Euclide per il calcolo del M.C.D. tra 113 e 84.

$$\begin{array}{rcl} 113 & = & 84 \cdot 1 + 29 \\ 84 & = & 29 \cdot 2 + 26 \\ 29 & = & 26 \cdot 1 + 3 \\ 26 & = & 3 \cdot 8 + 2 \\ 3 & = & 2 \cdot 1 + 1 \\ 2 & = & 1 \cdot 2 \end{array}$$

quindi $(113, 84) = 1$ e pertanto il sistema è risolubile.

Esprimiamo 1 come combinazione intera di 113 e 84.

$$\begin{array}{rcl} 29 & = & 113 - 84 \\ 26 & = & 84 - 29 \cdot 2 \\ 3 & = & 29 - 26 \\ 2 & = & 26 - 3 \cdot 8 \\ 1 & = & 3 - 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 29 & = & 113(1) + 84(-1) \\ 26 & = & 113(-2) + 84(3) \\ 3 & = & 113(3) + 84(-4) \\ 2 & = & 113(-26) + 84(35) \\ 1 & = & 113(29) + 84(-39) \end{array}$$

Quindi,

$$3 - 2 = 1 = 113(29) + 84(-39)$$

da cui

$$3 + 84 \cdot 39 = 2 + 113 \cdot 29 = 3279$$

è una soluzione del sistema di congruenze. L'insieme delle soluzioni è allora dato da

$$\{3279 + k[113, 84] \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{3279 + k113 \cdot 84 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

❑

Soluzione dell'esercizio 3 L'operazione è associativa. Infatti:

$$\begin{aligned} x*(y*z) &= x*(y+z-yz) = x+(y+z-yz)-x(y+z-yz) \\ &= x+y+z-yz-xy-xz+xyz \\ (x*y)*z &= (x+y-xy)*z = (x+y-xy)+z-(x+y-xy)z = \\ &= x+y-xy+z-xz-yz+xyz \end{aligned}$$

e quindi, $x*(y*z) = (x*y)*z$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{Q}$, ovvero $(\mathbb{Q}, *)$ è un semigruppo.

C'è l'elemento neutro. Infatti:

$$x*0 = x+0-x0 = x$$

Osserviamo che $x*y = y*x$ per ogni x, y e quindi anche $0*x = x$. Pertanto $(\mathbb{Q}.*)$ è un monoide.

$(\mathbb{Q}.*)$ non è un gruppo, dato che 1 non ha inverso. Infatti per ogni $x \in \mathbb{Q}$ si ha:

$$1*x = 1+x-1\cdot x = 1+x-x = 1 \neq 0.$$

❑

Soluzione dell'esercizio 4 Denotiamo $G = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 1\}$. Ovviamente la permutazione identica $(1) \in G$, dato che fissa tutti gli elementi. Siano $\sigma, \tau \in G$ allora, dato che $\sigma(1) = 1$ e $\tau(1) = 1$ anche $\tau^{-1}(1) = 1$ e quindi:

$$\sigma\tau^{-1}(1) = \sigma(\tau^{-1}(1)) = \sigma(1) = 1$$

ossia $\sigma\tau^{-1} \in G$, quindi, per il criterio del sottogruppo, G è un sottogruppo di S_n. ❑

Soluzione dell'esercizio 5 L'operazione è associativa. Infatti:

$$\begin{aligned} ((a,b)(c,d))(e,f) &= (ac, ad+b)(e,f) = (ace, acf+ad+b) \\ (a,b)((c,d)(e,f)) &= (a,b)(ce, cf+d) = (ace, a(cf+d)+b) = (ace, acf+ad+b) \end{aligned}$$

$(1,0)$ è unità sinistra e destra. Infatti

$$\begin{aligned} (1,0)(a,b) &= (1a, 1b+0) = (a,b) \\ (a,b)(1,0) &= (a1, a0+b) = (a,b) \end{aligned}$$

Ogni elemento è invertibile. Infatti se $(a,b) \in G$ allora $(a^{-1}, -a^{-1}b) \in G$ e

$$\begin{aligned} (a,b)(a^{-1}, -a^{-1}b) &= (aa^{-1}, -aa^{-1}b+b) = (1,0) \\ (a^{-1}, -a^{-1}b)(a,b) &= (a^{-1}a, a^{-1}b-a^{-1}b) = (1,0) \end{aligned}$$

X_1 è un sottogruppo. Infatti, $(1,0) \in G$. Inoltre se $(1,a), (1,b) \in G$ allora

$$(1,a)(1,b)^{-1} = (1,a)(1,-b) = (1, a-b) \in G$$

si conclude per il criterio del sottogruppo.

X_2 non è sottogruppo. Infatti non è chiuso per l'operazione. Ad esempio $(1/2, 0), (1,1) \in X_2$ ma $(1/2,0)(1,1) = 1/2, 1/2) \notin X_2$.

X_3 non è sottogruppo. Infatti non è detto che ogni elemento di X_3 abbia inverso in X_3. Ad esempio $(2,0) \in X_3$ mentre $(2,0)^{-1} = (1/2, 0) \notin X_3$. ❑

Soluzione dell'esercizio 6 Procediamo per induzione su n. Per $n = 2$ la tesi segue immediatamente dalla definizione di differenza simmetrica.

Supponiamo la tesi vera per n, allora

$$\begin{aligned} A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_{n+1} &= (A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n) \triangle A_{n+1} = \\ &= (A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n) - A_{n+1} \cup \\ &\quad \cup A_{n+1} - (A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n) \end{aligned}$$

Ma ora, per ipotesi di induzione $x \in 1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n$ se e solo se x sta in numero dispari di A_i, quindi

$$x \in (A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n) - A_{n+1} \iff \begin{array}{l} x \text{ appartiene a un numero} \\ \text{dispari degli } A_1, \ldots, A_n \text{ e} \\ \text{non appartiene a } A_{n+1} \end{array}$$

$$x \in A_{n+1} - (A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n) \iff \begin{array}{l} x \text{ appartiene a un nume-} \\ \text{ro pari degli } A_1, \ldots, A_n \text{ e} \\ \text{non appartiene a } A_{n+1} \end{array}$$

e quindi $x \in A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_{n+1}$ se e solo se appartiene a un numero dispari degli $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ ❑