Matematica Discreta (II modulo)

Primo appello, a.a. 1999/2000

19 giugno 2000

Agli esercizi sono assegnati i seguenti punteggi: Esercizio 1: 5, Esercizio 2: 2+3+2, Esercizio 3: 5, Esercizio 4: 4+2, Esercizio 5: 2+2+1, Esercizio 6: 6

Esercizio 1 Si determinino le soluzioni della congruenza $x^5 \equiv 2 \mod 21$.

Esercizio 2 Sia x_n la successione definita ricorsivamente da

$$\begin{cases} x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n \\ x_1 = 5 \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

1. Si provi che x_n è dispari per ogni $n \in \mathbb{N}$;
2. Si provi che $(x_{n+1}, x_n) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
3. Si determini una forma esplicita di x_n.

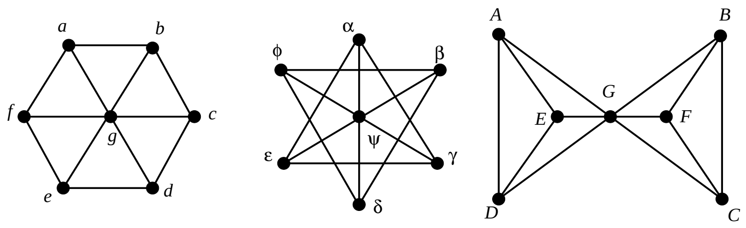
Esercizio 3 Sia $X \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, con $|X| = k \leq n$. Si determini la cardinalità dell'insieme $\mathcal{S} = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(x) \in X \ \forall x \in X\}$.

Esercizio 4 Sia G un grafo 2-connesso finito. Si provi che allora $|E| \geq |V| + k - 2$ essendo $k = \max_{v \in V(G)} \deg(v)$. Dire se vale il viceversa.

Esercizio 5 Sia $d = (2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 6)$. Provare che esiste un grafo G tale che score$(G) = d$ e determinarne uno. Dire se

1. è possibile determinarne uno che sia 2-connesso.
2. è possibile determinarne uno che sia connesso.

Esercizio 6 Dei tre grafi rappresentati in figura, dire, motivando la risposta, quali sono tra loro isomorfi e quali no.



Soluzioni proposte

Soluzione dell'esercizio 1 Osserviamo innanzitutto che $(2,21) = 1$, quindi 2 è invertibile modulo 21, per tanto la soluzione, se esiste, è un elemento invertibile. Osserviamo ancora che $\Phi(21) = \Phi(7 \cdot 3) = 6 \cdot 2 = 12$, quindi $(5, \Phi(21)) = (5, 12) = 1$ pertanto esiste x tale che $5x \equiv 1 \mod \Phi(21)$. Per il piccolo teorema di Fermat, $[2^x]_{21}$ è allora la soluzione della congruenza.

Determiniamo x. $1 = 25 - 24 = 5 \cdot 5 - 2 \cdot 12$, quindi $x = 5$. Ma allora la soluzione è data da $\left[2^5\right]_{21} = [32]_{21} = [11]_{21}$. ❏

Soluzione dell'esercizio 2 (1). Per induzione. Per $n = 0, 1$ è ovvio dalla definizione. Sia $n \geq 2$ e supponiamo che la tesi sia vera per ogni $k < n$, allora $x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2}$ è somma di un numero pari $(4x_{n-1})$ e di un numero, $-x_{n-2}$, che, per ipotesi di induzione, è dispari. Quindi x_n è dispari.
(2). Per induzione. Se $n = 0$, $(x_1, x_0) = (5, 1) = 1$. Supponiamo la tesi vera per n e proviamola per $n + 1$. Dalla relazione di ricorrenza si ha che $(x_{n+2}, x_{n+1}) = (x_{n+1}, -x_n) = (x_{n+1}, x_n)$ e per ipotesi di induzione, quest'ultimo è 1.
(3). Il polinomio caratteristico di tale equazione ricorsiva è dato da $t^2 - 4t + 1$ le cui radici sono: $2 + \sqrt{5}$ e $2 - \sqrt{5}$. Quindi una generica soluzione della relazione ricorsiva è data da: $x_n = \alpha(2 + \sqrt{5})^n + \beta(2 - \sqrt{5})^n$. Determiniamo α e β in modo che siano verificate le condizioni iniziali.

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ (2 + \sqrt{5})\alpha + (2 - \sqrt{5})\beta = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \\ \beta = \frac{5-3\sqrt{5}}{10} \end{cases}$$

Quindi un'espressione esplicita di x_n è data da:

$$x_n = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}(2 + \sqrt{5})^n + \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}(2 - \sqrt{5})^n.$$

❏

Soluzione dell'esercizio 3 Indichiamo con $Y = \{1, \ldots, n\} - X$. Per ogni $(\sigma, \tau) \in S_X \times S_y$ consideriamo l'applicazione $\varphi_{(\sigma,\tau)} : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ definita da

$$\varphi_{(\sigma,\tau)}(i) = \left\langle \begin{array}{ll} \sigma(i) & \text{se } i \in X \\ \tau(i) & \text{se } i \in Y \end{array} \right.$$

Chiaramente, dato che $X \cap Y = \varnothing$ e $X \cup Y = \{1, \ldots, n\}$ l'applicazione è ben definita.
$\varphi_{(\sigma,\tau)}$ è una permutazione. Basta provare che è iniettiva (dato che l'insieme di definizione è finito e coincide con il codominio). Siano $i \neq j$: se $i, j \in X$ allora $\varphi_{(\sigma,\tau)}(i) = \sigma(i) \neq \sigma(j) = \varphi_{(\sigma,\tau)}(j)$, dato che σ è una permutazione; se $i, j \in Y$ allora $\varphi_{(\sigma,\tau)}(i) = \tau(i) \neq \tau(j) = \varphi_{(\sigma,\tau)}(j)$, dato che τ è una permutazione; infine se $i \in X$ e $j \in Y$ allora $\varphi_{(\sigma,\tau)}(i) = \sigma(i) \in X$ e $\varphi_{(\sigma,\tau)}(j) = \tau(j) \in Y$ e $\sigma(i) \neq \tau(j)$ poiché $X \cap Y \neq \varnothing$.

Osserviamo ora che, per definizione, $\varphi_{(\sigma,\tau)} \in \mathcal{S}$, ossia abbiamo definito una applicazione $\varphi : S_X \times S_y \to \mathcal{S}$. Proviamo che tale applicazione è bigettiva.
φ è iniettiva. Se $\sigma \neq \sigma'$ esiste $i \in X$ tale che $\sigma(i) \neq \tau(i)$ e quindi $\varphi_{(\sigma,\tau)}(i) = \sigma(i) \neq \sigma'(i) = \varphi_{(\sigma',\tau)}(i)$ e quindi $\varphi_{(\sigma,\tau)} \neq \varphi_{(\sigma',\tau)}$. Analogamente se $\tau \neq \tau'$ allora $\varphi_{(\sigma,\tau)} \neq \varphi_{(\sigma',\tau')}$.
φ è surgettiva. Sia $\sigma \in \mathcal{S}$, allora $\sigma_{|X} \in S_X$, e dato che σ è bigettiva, anche $\sigma(Y) = Y$ e quindi $\sigma_{|Y} \in S_Y$. È immediato allora vedere che $\sigma = \varphi_{(\sigma_{|X}, \sigma_{|Y})}$.

Ma allora

$$|\mathcal{S}| = |S_X \times S_Y| = |S_X| \cdot |S_Y| = k!(n - k)!.$$

❏

Soluzione dell'esercizio 4 Sia v un vertice di grado k (massimo possibile), allora $G - v$ è un grafo connesso, quindi contiene un albero generatore T (ossia tale che $V(T) = V(G - v)$. Ma allora, per la relazione che lega il numero di vertici e il numero di lati di un albero,

$$|E(G - v)| \geq |(E(T)| = |V(T)| - 1 = |V(G - v)| - 1. \qquad (1)$$

D'altra parte, $|V(G - v)| = |V(G)| - 1$, e dato che $\deg(v) = k$, $|E(G - v)| = |E(G)| - k$. Mettendo queste due relazioni nella 1 si ottiene

$$|E(G)| - k \geq |V(G)| - 1 - 1$$

da cui la tesi.

Il viceversa non è vero. Si consideri ad esempio il grafo rappresentato in figura 1: per questo grafo si ha che $|E| = 7$, $|V| = 6$ e $k = \max \deg(v) = 3$, e

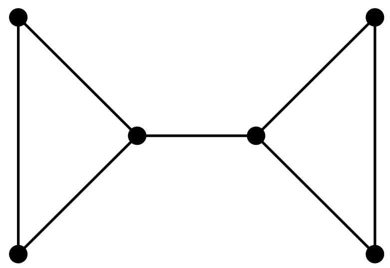


Figura 1: L'esempio della soluzione dell'esercizio 4

quindi $|E| = |V| + k - 2$, però tale grafo non è 2-connesso. ❑

Soluzione dell'esercizio 5 Usiamo il teorema dello score:

$$\begin{array}{rcl} d & = & (2,2,2,2,3,3,3,5,6) \\ d_1 & = & (2,2,1,1,2,2,2,4) \\ d_1 & = & (1,1,2,2,2,2,2,4) \\ d_2 & = & (1,1,2,1,1,1,1) \\ d_2 & = & (1,1,1,1,1,1,2) \\ d_3 & = & (1,1,1,1,0,0) \end{array}$$

Dato che d_3 è realizzabile come score di un grafo, anche d lo è. La costruzione standard, condotta con un po' di attenzione, produce il grafo in figura 2, che è anche connesso e 2-connesso. Che il grafo sia 2-connesso lo si può vedere mostrando che è ottenuto da un ciclo con successive aggiunzioni e suddivisioni di lati (cfr. figura 3). ❑

Soluzione dell'esercizio 6 Il primo grafo è hamiltoniano (in particolare quindi è 2-connesso) in quanto c'è il ciclo (a, b, c, d, e, f, g, a).

Il terzo grafo non è 2-connesso, infatti se a questo grafo si toglie il vertice G si ottengono i due cicli (A, D, E) e (B, C, F).

Il secondo e il terzo grafo sono isomorfi(quindi il primo e il secondo non lo sono). Un isomorfismo è dato ad esempio dalla funzione definita da:

$$\begin{array}{rcl} \alpha & \mapsto & A \\ \beta & \mapsto & B \\ \gamma & \mapsto & D \\ \delta & \mapsto & C \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \epsilon & \mapsto & E \\ \varphi & \mapsto & F \\ \psi & \mapsto & G \end{array}$$

Che tale funzione sia un isomorfismo segue dal fatto che il vertice ψ e la sua immagine G sono collegati con tutti gli altri vertici. I vertici $(\alpha, \gamma\epsilon$ oltre a essere collegati con ψ sono collegati soltanto tra loro in tutti i modi possibili e anche le rispettive immagini A, D, E sono collegati solo tra loro (in tutti i modo possibili) oltre che con G. Anche l'altra terna di vertici β, δ, φ e le rispettive immagini B, C, F hanno la stessa proprietà, quindi i lati di un grafo sono messi in bigezione con i lati dell'altro. ❑

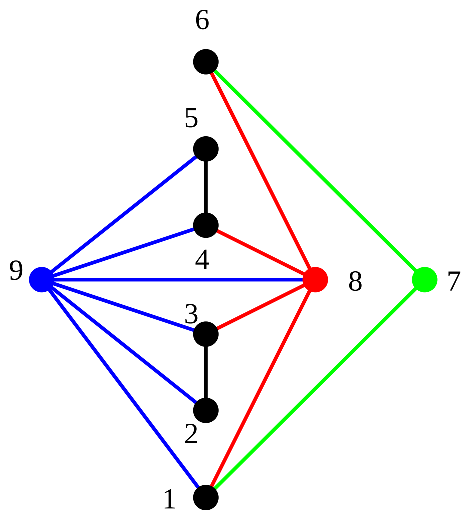


Figura 2: Il grafo costruito della soluzione dell'esercizio 5. La configurazione di partenza è data dai vertici $1, 2, 3, 4, 5, 6$, e dai due lati $\{2, 3\}$, $\{4, 5\}$ che realizzano lo score d_3 a cui sono successivamente aggiunti i vertici $7, 8, 9$ ottenendo dei grafi, che realizzano, nell'ordine, gli score d_2, d_1 e infine d

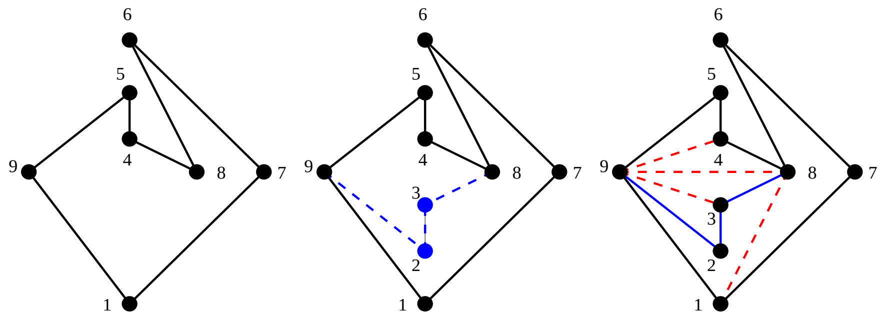


Figura 3: Il grafo della soluzione dell'esercizio 5 è 2-connesso