Matematica Discreta (II modulo)

Secondo appello, a.a. 1999/2000

10 luglio 2000

Esercizio 1 Si supponga di avere un mazzo con 15 carte e si eseguano le seguenti operazioni:

1. Si dispongano le carte in una matrice 3×5 procedendo per colonne (da sinistra a destra e dall'alto in basso)
2. si raccolgano le carte procedendo per righe (dall'alto in basso e da sinistra a destra)

Dire, motivando la risposta, se dopo un numero finito (positivo) di tali operazioni il mazzo torna nella posizione iniziale. In caso di risposta affermativa, calcolare il minimo tale numero.

Esercizio 2 Si determini l'insieme delle soluzioni del sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 396 & \mod 385 \\ x \equiv 32 & \mod 504 \end{cases}$$

Esercizio 3 Sia x_n la soluzione dell'equazione ricorsiva lineare

$$x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n$$

con dati iniziali $x_0 = 2$ e $x_1 = 2$. Si provi che

1. Si provi che $x_n \leq 3^n$ per ogni $n \geq 1$.
2. Si determini (x_{n+1}, x_n) per ogni n.
3. Si determini una forma esplicita della soluzione dell'equazione.

Esercizio 4 Siano $d_1 = (1, 1, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 6.8)$ e $d_2 = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 5)$. Dire, motivando la risposta, per quali $i = 1, 2$ esiste un grafo G tale che $\text{score}(G) = d_i$. In caso di risposta affermativa costruire un tale grafo e dire, motivando la risposta, se tale score è realizzabile da un albero.

Esercizio 5 Sia G un grafo 2-connesso. Si provi che G non ha foglie. Dire, motivando la risposta, se è vero che un grafo finito, connesso, senza foglie e con almeno tre vertici è necessariamente 2-connesso.

Esercizio 6 Dire quali tra i seguenti grafi sono tra loro isomorfi e quali no:

1. $G_1 = (\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}, E_1)$, essendo $E_1 = \{\{n, m\} \mid n - m = 1 \text{ in } \mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}\}$
2. $G_2 = (\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}, E_2)$, essendo $E_2 = \{\{n, m\} \mid n - m = 2 \text{ in } \mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}\}$
3. $G_3 = ((\mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}})^*, E_3)$, essendo $E_3 = \{\{n, m\} \mid n = 3m \text{ in } \mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}\}$

Soluzioni proposte

Soluzione dell'esercizio 1 Eseguire le due operazioni produce una permutazione del mazzo di carte e iterare le due permutazioni corrisponde ad iterare la stessa permutazione. Dato che ogni permutazione di un insieme finito ha ordine finito (i.e. se $\sigma \in S_n$ esiste k tale che $\sigma^k = 1$) allora dopo un numero finito di volte il mazzo tornerà nella disposizione di partenza.

Per determinare il minimo tale numero scriviamo esplicitamente la permutazione. La prima operazione sistema le carte nel modo seguente:

1	4	7	10	13
2	5	8	11	14
3	6	9	12	15

raccogliendo quindi per righe le carte si ottiene la permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 6 & 11 & 2 & 7 & 12 & 3 & 8 & 13 & 4 & 9 & 14 & 5 & 10 & 15 \end{pmatrix}$$

la cui decomposizione in cicli disgiunti è:

$$\sigma = (1)(2\ 6\ 12\ 14\ 10\ 4)(3\ 11\ 9\ 13\ 5\ 7)(8)(15)$$

L'ordine di σ, ossia il minimo intero positivo per cui $\sigma^k = 1$ è dato dal minimo comune multiplo delle lunghezze dei cicli, ossia 6. ❏

Soluzione dell'esercizio 2 Dato che $396 \equiv 11 \mod 385$ il sistema è equivalente a:

$$\begin{cases} x \equiv 11 & \mod 385 \\ x \equiv 32 & \mod 504 \end{cases}$$

Calcoliamo il massimo comun divisore tra 504 e 385 usando l'algoritmo di Euclide.

$$\begin{aligned} 504 &= 385 \cdot 1 + 119 \\ 385 &= 119 \cdot 3 + 28 \\ 119 &= 28 \cdot 4 + 7 \\ 28 &= 7 \cdot 4 \end{aligned}$$

quindi $(504, 385) = 7$ e pertanto il sistema di congruenze ha soluzione (dato che $(504, 385) = 7 \mid 21 = 32 - 11$. Esprimiamo 7 come combinazione intera di 504 e 385.

$$\begin{array}{rcl} 7 &=& 119 + 28 \cdot (-4) \\ 28 &=& 385 + 119 \cdot (-3) \quad \Rightarrow \quad 7 = 119 + (385 + 119 \cdot (-3))(-4) \\ && \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; = 119 \cdot (13) + 385 \cdot (-4) \\ 119 &=& 504 + 385 \cdot (-1) \quad \Rightarrow \quad 7 = (504 + 385 \cdot (-1)) \cdot (13) + 385 \cdot (-4) \\ && \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; = 504 \cdot (13) + 385 \cdot (-17) \end{array}$$

Quindi,

$$32 - 11 = 3 \cdot 7 = 3(504 \cdot (13) + 385 \cdot (-17)) = 504 \cdot 39 + 385 \cdot (-51)$$

e per tanto

$$-19624 = 32 - 504 \cdot 39 = 11 + 385 \cdot (-51)$$

è una soluzione del sistema. Dato che il minimo comune multiplo tra 504 e 385 è dato da $[504, 385] = 504 \cdot 385/(504, 385) = 504 \cdot 385/7 = 27720$, l'insieme delle soluzioni del sistema è:

$$\{-19624 + k27720 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{8096 + k27720 \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

❏

Soluzione dell'esercizio 3 (1). Procediamo per induzione su n. Per $n = 1$ si ha che $2 \geq 1 = 3^0$. Supponiamo $n \geq 1$, e che la tesi sia vera per n, e proviamo che allora è vera per $n + 1$. Infatti

$$x_{n+1} = 3x_n - x_{n-1} \leq 3x_n \leq 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}.$$

Dove la seconda disuguaglianza è data dall'ipotesi di induzione, mentre la prima dal fatto che per ogni n si ha che $x_n \geq 0$.

Quest'ultimo fatto lo proviamo nuovamente per induzione. Per $n = 0, 1$ la tesi è banale. Se $n \geq 2$ allora $x_n = 3x_{n-1} - x_{n-2} \geq 0$ in quanto per ipotesi di induzione $x_{n-1} \geq 0$ e $x_{n-2} \geq 0$.

(2). Proviamo che $(x_{n+1}, x_n) = 2$ per ogni n. Per $n = 0$ la tesi è banale. Supponiamo la tesi vera per n e proviamola per $n + 1$. Dalla relazione $x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n$ e dal lemma per la dimostrazione dell'algoritmo di Euclide, segue che $(x_{n+2}, x_{n+1}) = (x_{n+1}, x_n)$ e quest'ultimo, per ipotesi di induzione è 3.

(3). Il polinomio caratteristico dell'equazione è dato da $t^2 - 3t + 1$ le cui radici sono $(3 + \sqrt{5})/2$ e $(3 - \sqrt{5})/2$. La soluzione generale dell'equazione ricorsiva è allora data da: $A(3 + \sqrt{5})^n/2^n + B(3 - \sqrt{5})^n/2^n$. Imponendo le due condizioni iniziali si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ A\frac{3+\sqrt{5}}{2} + B\frac{3-\sqrt{5}}{2} = 2. \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $A = (\sqrt{5} - 1)/\sqrt{5}$ e $B = (\sqrt{5} + 1)/\sqrt{5}$, quindi la successione definita per ricorrenza è data da:

$$x_n = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5}} \frac{(3 + \sqrt{5})^n}{2^n} + \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5}} \frac{(3 - \sqrt{5})^n}{2^n}$$

❑

Soluzione dell'esercizio 4 Osserviamo che in d_1 compaiono tre numeri dispari, quindi non può essere lo score di un grafo dato che in tal caso il numero di numeri dispari dovrebbe essere pari.

Usiamo il teorema dello score per determinare se d_2 è realizzabile oppure no.

$$\begin{aligned} d_2 &= (1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 5) \\ d_2' &= (1, 1, 0, 0, 1, 1, 2) \\ d_2' &= (0, 0, 1, 1, 1, 1, 2) \\ d_2'' &= (0, 0, 1, 1, 0, 0) \end{aligned}$$

Evidentemente d_2'' è realizzabile e pertanto d_2 lo è (vedi la figura). Osserviamo

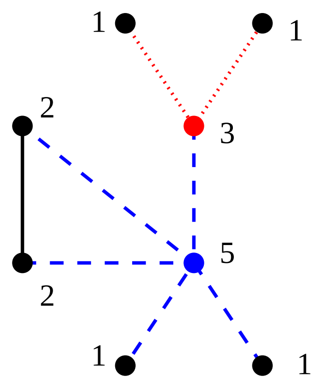

Figura 1: Un grafo che realizza d_2 come score (esercizio 4)

inoltre che d_2 non può essere realizzato da un albero in quanto se G è un grafo che realizza d_2 allora

$$\begin{aligned} |V(G)| &= 8 \\ |E(G)| &= \frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)} \deg(v) = \frac{1+1+1+1+2+2+3+5}{2} = 8 \end{aligned}$$

Un tale grafo non può quindi essere un albero in quanto se lo fosse si avrebbe $|V(G)| - 1 = |E(G)|$. ❑

Soluzione dell'esercizio 5 Per assurdo sia v una foglia di G e sia w l'unico vertice tale che $\{v, w\} \in E(G)$. Allora in $G - w$ non ci sono lati che partono da v, ma ci sono altri vertici diversi da v (essendo 2-connesso, G ha almeno 3 vertici), quindi $G - w$è sconnesso. Assurdo.

Il viceversa non è vero, si consideri ad esempio il grafo G rappresentato in figura 2. Il grafo G non ha foglie, è connesso ed ha più di 3 vertici ma non è

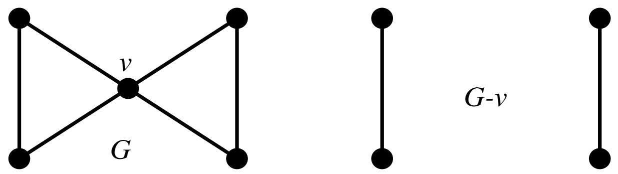

Figura 2: Il contresempio dell'esercizio 5, G è connesso, non ha foglie ma non è 2-connesso

nemmeno 2-connesso. ❑

Soluzione dell'esercizio 6 Scriviamo esplicitamente i lati dei tre grafi:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{\{0,1\},\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,0\}\} \\ E_2 &= \{\{0,2\},\{1,3\},\{2,4\},\{3,5\},\{4,0\},\{5,1\}\} \\ E_3 &= \{\{3,1\},\{6,2\},\{2,3\},\{5,4\},\{1,5\},\{4,6\}\} \end{aligned}$$

Osserviamo che $G_1 \cong G_3 \cong C_6$, dato che $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 0)$ è un ciclo in G_1 che

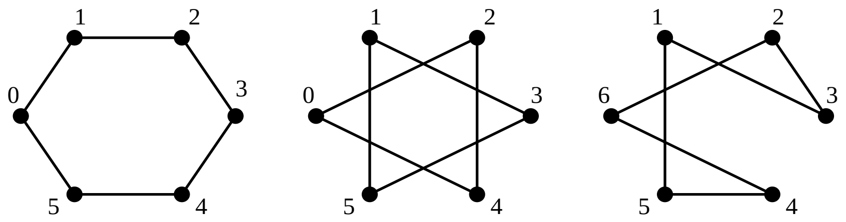

Figura 3: I gragfi G_1 e G_3 sono dei cicli, mente il grafo G_2 è costituito da due cicli disgiunti, in particolare non è connesso

contiene tutti i vertici e tutti i lati e anche $(3, 1, 5, 4, 6, 2, 3)$ è un ciclo in G_3 che contiene tutti i vertici e tutti i lati. In particolare G_1 e G_3 sono connessi. Il grafo G_2 non è connesso, in quanto è costituito dai due cicli $(0, 2, 4, 0)$ e $(1, 3, 5, 1)$ che non hanno vertici in comune. Quindi G_2 non è isomorfo né a G_1 né a G_2. Si veda la figura3. ❑