Matematica Discreta, II modulo

Seconda prova in itinere, a.a. 1999/2000

9 giugno 2000

Da svolgersi in due ore. Ai cinque esercizi sono assegnati rispettivamente i seguenti punteggi in trentesimi:
Esercizio 1: $6 + 4$, Esercizio 2: $3 + 2 + 3$, Esercizio 3: $3 + 4$, Esercizio 4: 6, Esercizio 5: $2 + 2 + 5$.

Esercizio 1 Sia $G = (V, E)$ un grafo finito. Si provi che se $|E| \geq |V|$ allora il grafo contiene dei cicli.

Si dica, motivando la risposta, se è vero il viceversa.

Esercizio 2 Sia $d = (1, 1, 1, 2, 4, 4, 4, 5, 5, 7)$. Provare che esiste un grafo G tale che $\mathrm{score}(G) = d$ e determinarne uno. Dire, motivando la risposta, se

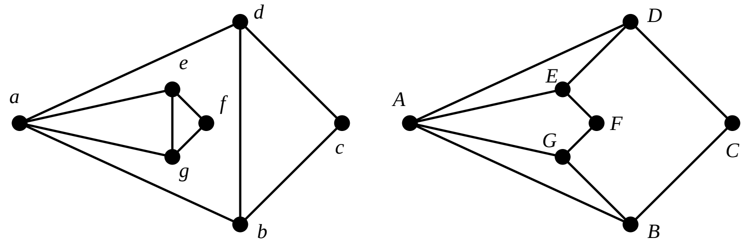
1. è possibile determinarne uno connesso?
2. è possibile determinarne uno che non abbia cicli?

Esercizio 3 Sia G il grafo definito da:

$$\begin{aligned} V(G) &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ E(G) &= \{\{i, j\} \mid |i - j| \leq 2\} \end{aligned}$$

Si scriva la matrice di incidenza di G. Usando tale matrice si determini l'insieme dei vertici che hanno distanza 2 dal vertice 6.

Esercizio 4 Dire, motivando la risposta, se i due grafi rappresentati in figura sono isomorfi



Esercizio 5 Si dia la definizione di grafo euleriano e si enunci il teorema di caratterizzazione dei grafi euleriani. Si dia inoltre uno schizzo della dimostrazione di tale teorema.

Soluzioni proposte

Soluzione dell'esercizio 1 Siano $G_i = (V_i, E_i)$ con $i = 1, \ldots, k$, le componenti connesse di G, allora

$$\sum_{i=1}^{k} |V_i| = |V| \leq |E| = \sum_{i=1}^{k} |E_i|$$

Ma allora esiste un i tale che $|V_i| \leq |E_i|$. G_i non può essere un albero (altrimenti si avrebbe $|V_i| - 1 = |E_i|$), quindi, dato che è connesso, deve avere cicli.

Si poteva provare la tesi, ricordando che se $G = (V, E)$ è una foresta (ossia è un grafo senza cicli), allora $|E| = |V| - k$ essendo k il numero di componenti connesse di G. In particolare allora $|E| < |V|$.

Il viceversa non è vero. Si consideri ad esempio il grafo dato da $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$ e $E(G) = \big\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\big\}$ in figura 1. Per tale grafo si ha

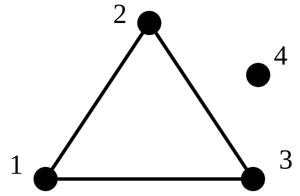


Figura 1: Il contresempio dell'esercizio 1

$|V(G)| = 4 < 3 = |E(G)|$ nonostante che abbia un ciclo. $\square$

Soluzione dell'esercizio 2 Usiamo il teorema dello score:

$$\begin{array}{rcl}
d & = & (1,1,1,2,4,4,4,5,5,7) \\
d_1 & = & (1,1,0,1,3,3,3,4,4) \\
d_1 & = & (0,1,1,1,3,3,3,4,4) \\
d_2 & = & (0,1,1,1,2,2,2,3) \\
d_3 & = & (0,1,1,1,1,1,1)
\end{array}$$

Dato che d_3 è realizzabile come score di un grafo, anche d lo è. La costruzione standard, condotta con un po' di attenzione, produce il grafo in figura 2, che è anche connesso.

Lo score d non può essere realizzato da nessun grafo senza cicli. Infatti, dalla formula $2\,|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ si ottien che se $\operatorname{score} G = d$ allora $|E|\,(G) = 17 \geq 10 = |V(G)|$. Utilizzando il risultato dell'esercizio precedente (1), si ha allora che G deve avere cicli. $\square$

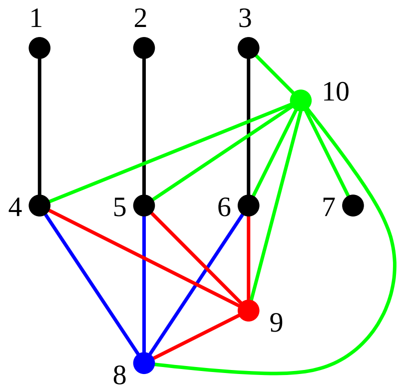


Figura 2: Il grafo costruito della soluzione dell'esercizio 2. La configurazione di partenza è data dai vertici $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, e dai tre lati $\{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}$ che realizzano lo score d_3 a cui sono successivamente aggiunti i vertici $8, 9, 10$ ottenendo dei grafi, che realizzano, nell'ordine, gli score d_2, d_1 e infine d

Soluzione dell'esercizio 3 La matrice di incidenza di G è data da:

$$A0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La sesta riga della matrice A^2 è data da: $(0\ 1\ 2\ 1\ 1\ 2)$, quindi i vertici per i quali esiste una passeggiata di lunghezza 2 dal vertice 6 sono i vertici $2, 3, 4, 5, 6$. D'altra parte $d(6, 6) = 0$, $d(6, 5) = d(6, 4) = 1$ (sono adiacenti), e 6 non è adiacente a 2 e 3, quindi l'insieme cercato è $\{2, 3\}$. ❑

Soluzione dell'esercizio 4 Il primo grafo non è 2-connesso. Infatti togliendo il vertice a a questo grafo, si ottiene un grafo costituito da due cicli (figura 3). Il secondo grafo è hamiltoniano: il ciclo (A, B, C, D, E, F, G, A) percorre tutti i vertici del grafo. In particolare questo grafo è 2-connesso. I due grafi non sono quindi isomorfi ❑

Soluzione dell'esercizio 5 Vedi il libro di testo. ❑

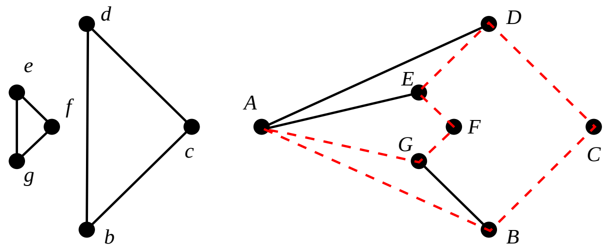


Figura 3: Il grafo $G - a$ ed il ciclo hamiltoniano del secondo grafo dell'esercizio 4