Matematica Discreta (II modulo)

Primo appello, a.a. 2000/2001

13 giugno 2001

Da svolgersi in tre ore. Al candidato si richiede di svolgere cinque (e non più di cinque) dei sei esercizi. A chi deve recuperare una delle prove in itinere, si richiede di svolgere tutti gli esercizi della corrispondente parte e di rispondere alla domanda di teoria.

Esercizio 1 Dire se il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 71 & \mod 148 \\ x \equiv 67 & \mod 180 \end{cases}$$

ammette soluzioni ed in tal caso determinarle.

Esercizio 2 Si determinino le soluzioni della congruenza $x^7 \equiv 8 \mod 77$.

Esercizio 3 Sia $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ con $n \geq 2$.

1. Si determini la cardinalità dell'insieme $\mathcal{F} = \{f \in X^X \mid \text{è bigettiva e } f(1) = 2\}$.

Sia $A \subseteq X$ e sia $g : X \to X$ una funzione bigettiva.

2. Si determini la cardinalità dell'insieme $\mathcal{G} = \{f \in X^X \mid \text{è bigettiva e } f|_A = g_{|A}\}$.

Domanda di teoria. Si dia la definizione di elemento invertibile in $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$, quindi si enunci e si provi il piccolo teorema di Fermat.

Esercizio 4 Sia $T = (V, E)$ un albero e per ogni i si denoti con $V_i = \{v \in V \mid \deg(v) = i\}$.
Si provi che se T ha solo verici di grado 1 e 5 allora $|V_1| = 2 + 3\,|V_5|$.
Dire motivando la risposta se è vero il viceversa.

Esercizio 5 Dire, motivando la risposta, quale dei vettori

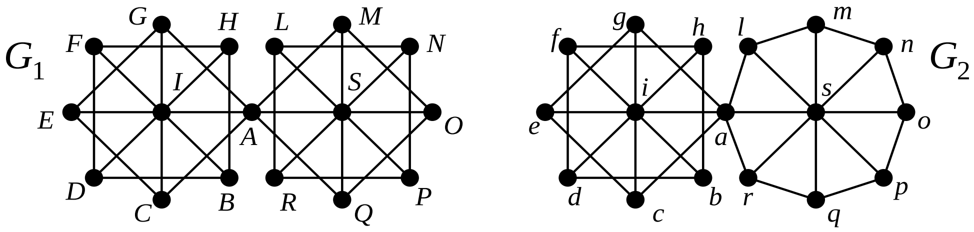
$$d_1 = (1, 1, 3, 3, 3, 5, 7, 7) \qquad d_2 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4, 4)$$

è lo score di un grafo e quando ciò è possibile costruire un tale grafo. Si dica inoltre se

1. è possibile trovare un tale grafo che sia anche un albero

2. è possibile trovare un tale grafo che sia anche 2-connesso

Esercizio 6 Dire, motivando la risposta, se i due grafi rappresentati in figura sono tra loro isomorfi oppure no.



Domanda di teoria. Si dia la definizione di grafo 2-connesso, quindi si provi che in un grafo 2-connesso ogni coppia di vertici è contenuta in un ciclo..

Soluzioni proposte

Soluzione dell'esercizio 1
❑

Soluzione dell'esercizio 2 $(77, 8) = 1$, quindi 8 è invertibile modulo 77, per tanto la soluzione, se esiste, è un elemento invertibile. Inoltre $\Phi(77) = \Phi(7 \cdot 11) = 6 \cdot 10 = 60$, quindi $(7, \Phi(77)) = (7, 60) = 1$ pertanto esiste s tale che $7s \equiv 1 \mod \Phi(77)$. Per il piccolo teorema di Fermat, $[8^x]_{77}$ è allora la soluzione della congruenza.

Usando l'algoritmo di Euclide, si ottiene $1 = 2 \cdot 60 - 17 \cdot 7$, e quindi la soluzione è data da $\left[8^43\right]_{77} = [50]_{77}$. ❑

Soluzione dell'esercizio 3
❑

Soluzione dell'esercizio 4
❑

Soluzione dell'esercizio 5 Usiamo il teorema dello score:

$$\begin{aligned}
d &= (2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 6) \\
d_1 &= (2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 4) \\
d_1 &= (1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 4) \\
d_2 &= (1, 1, 2, 1, 1, 1, 1) \\
d_2 &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 2) \\
d_3 &= (1, 1, 1, 1, 0, 0)
\end{aligned}$$

Dato che d_3 è realizzabile come score di un grafo, anche d lo è. La costruzione standard, condotta con un po' di attenzione, produce il grafo in figura 1, che è anche connesso e 2-connesso. Che il grafo sia

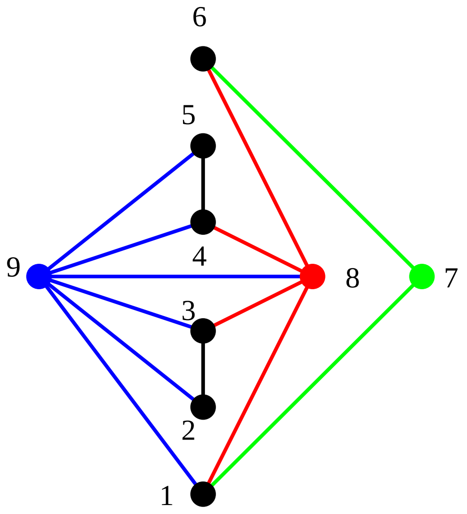


Figura 1: Il grafo costruito della soluzione dell'esercizio 5. La configurazione di partenza è data dai vertici $1, 2, 3, 4, 5, 6$, e dai due lati $\{2, 3\}, \{4, 5\}$ che realizzano lo score d_3 a cui sono successivamente aggiunti i vertici $7, 8, 9$ ottenendo dei grafi, che realizzano, nell'ordine, gli score d_2, d_1 e infine d

2-connesso lo si può vedere mostrando che è ottenuto da un ciclo con successive aggiunzioni e suddivisioni di lati (cfr. figura 2). ❑

Soluzione dell'esercizio 6 Il primo grafo è hamiltoniano (in particolare quindi è 2-connesso) in quanto c'è il ciclo (a, b, c, d, e, f, g, a).

Il terzo grafo non è 2-connesso, infatti se a questo grafo si toglie il vertice G si ottengono i due cicli (A, D, E) e (B, C, F).

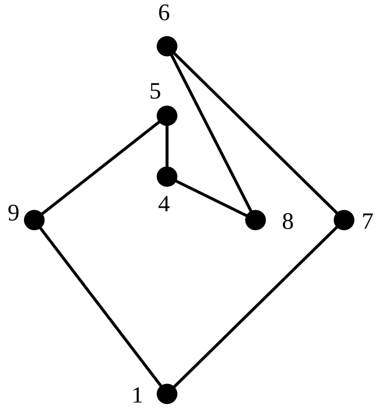


Figura 2: Il grafo della soluzione dell'esercizio 5 è 2-connesso

Il secondo e il terzo grafo sono isomorfi(quindi il primo e il secondo non lo sono). Un isomorfismo è dato ad esempio dalla funzione definita da:

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \mapsto & A \\ \beta & \mapsto & B \\ \gamma & \mapsto & D \\ \delta & \mapsto & C \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \epsilon & \mapsto & E \\ \varphi & \mapsto & F \\ \psi & \mapsto & G \end{array}$$

Che tale funzione sia un isomorfismo segue dal fatto che il vertice ψ e la sua immagine G sono collegati con tutti gli altri vertici. I vertici $(\alpha, \gamma\epsilon$ oltre a essere collegati con ψ sono collegati soltanto tra loro in tutti i modi possibili e anche le rispettive immagini A, D, E sono collegati solo tra loro (in tutti i modo possibili) oltre che con G. Anche l'altra terna di vertici β, δ, φ e le rispettive immagini B, C, F hanno la stessa proprietà, quindi i lati di un grafo sono messi in bigezione con i lati dell'altro. ❑