# Matematica Discreta (II modulo)

Secondo appello, a.a. 2000/2001

2 luglio 2001

**Esercizio 1** Dire se il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 37 & \mod 280 \\ x \equiv 47 & \mod 165 \end{cases}$$

ammette soluzioni ed in tal caso determinarle.

**Esercizio 2** Sia $x_n$ la successione definita ricorsivamente da

$$\begin{cases} x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n \\ x_1 = 44 \\ x_0 = 43 \end{cases}$$

1. Si provi che $x_n$ è dispari se $n$ è pari ed è pari se $n$ è dispari;
2. Si provi che $[x_{n+1}, x_n] = x_{n+1}x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

**Esercizio 3** Si determini il numero di anagrammi della parola

PRECIPITEVOLISSIMEVOLMENTE.

Si determini inoltre il numero di tali anagrammi che scambiano le P con le O.

---

**Esercizio 4** Dire, motivando la risposta, quale dei vettori

$$\begin{aligned} d_1 &= (0,1,2,3,3,3,5,8,8,9) \\ d_2 &= (1,3,3,3,4,4,4,5,5) \end{aligned}$$

è lo score di un grafo e quando ciò è possibile costruire un tale grafo. Si dica inoltre se

1. è possibile trovare un tale grafo che sia anche un albero
2. è possibile trovare un tale grafo che sia anche connesso

**Esercizio 5** Sia $G = (V, E)$ un grafo e sia $n = |V| \geq 3$. Si provi che in $G$ non possono esistere contemporaneamente due vertici di grado $n-1$ e un vertice di grado 1.

**Esercizio 6** Dire quali tra i seguenti grafi sono tra loro isomorfi e quali no:

1. $G_1 = (\mathbb{Z}/_{16\mathbb{Z}}, E_1)$, essendo $E_1 = \{\{n, m\} \mid n = m + 2 \text{ in } \mathbb{Z}/_{16\mathbb{Z}}\}$
2. $G_2 = (\mathbb{Z}/_{16\mathbb{Z}}, E_2)$, essendo $E_2 = \{\{n, m\} \mid n = m + 3 \text{ in } \mathbb{Z}/_{16\mathbb{Z}}\}$
3. $G_3 = ((\mathbb{Z}/_{17\mathbb{Z}})^*, E_3)$, essendo $E_3 = \{\{n, m\} \mid n = 3m \text{ in } \mathbb{Z}/_{17\mathbb{Z}}\}$

# Soluzioni proposte

**Soluzione dell'esercizio 1**

$\square$

**Soluzione dell'esercizio 2** (1).

(2). Dato che $[x_n, x_{n+1}] = x_n x_{n+1}/(x_n, x_{n+1})$, provare la tesi equivale a provare che $(x_n, x_{n+1}) = 1$ per ogni $n$. Lo facciamo per induzione su $n$. Se $n = 0$, $(x_1, x_0) = (44, 43) = 1$, dato che sono numeri consecutivi. Supponiamo la tesi vera per $n$ e proviamola per $n + 1$. Dalla relazione di ricorrenza si ha che $(x_{n+2}, x_{n+1}) = (x_{n+1}, x_n$ e per ipotesi di induzione, quest'ultimo è 1. $\square$

**Soluzione dell'esercizio 3**

$\square$

**Soluzione dell'esercizio 4**

$\square$

**Soluzione dell'esercizio 5**

$\square$

**Soluzione dell'esercizio 6** Scriviamo esplicitamente i lati dei tre grafi:

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \{\{0,1\},\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,0\}\} \\
E_2 &= \{\{0,2\},\{1,3\},\{2,4\},\{3,5\},\{4,0\},\{5,1\}\} \\
E_3 &= \{\{3,1\},\{6,2\},\{2,3\},\{5,4\},\{1,5\},\{4,6\}\}
\end{aligned}
$$

Osserviamo che $G_1 \cong G_3 \cong C_6$, dato che $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 0)$ è un ciclo in $G_1$ che contiene tutti i vertici e

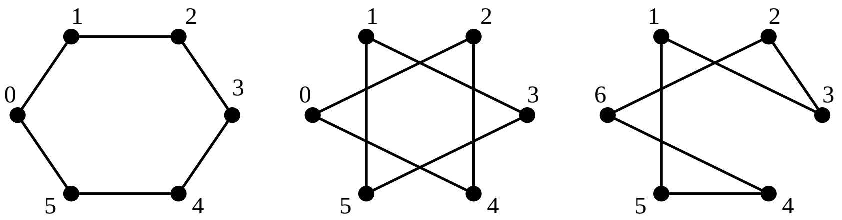


Figura 1: I gragfi $G_1$ e $G_3$ sono dei cicli, mente il grafo $G_2$ è costituito da due cicli disgiunti, in particolare non è connesso

tutti i lati e anche $(3, 1, 5, 4, 6, 2, 3)$ è un ciclo in $G_3$ che contiene tutti i vertici e tutti i lati. In particolare $G_1$ e $G_3$ sono connessi. Il grafo $G_2$ non è connesso, in quanto è costituito dai due cicli $(0, 2, 4, 0)$ e $(1, 3, 5, 1)$ che non hanno vertici in comune. Quindi $G_2$ non è isomorfo né a $G_1$ né a $G_2$. Si veda la figura1. $\square$