Matematica Discreta, II modulo

Prima prova in itinere, a.a. 2000/2001

27 aprile 2001

Da svolgersi in tre ore. Si richiede che vengano svolti a scelta quattro (e non più di qyuattro) dei cinque esercizi e che si risponda alla domanda di teoria.

Esercizio 1 Siano X, Y, A insiemi. Si provi che $(X \times Y)^A$ è in corrispondenza biunivoca con $X^A \times Y^A$.

Esercizio 2 Siano X, Y insiemi finiti, e $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Posto $|X| = n$, $|Y| = m$, $|A| = h$ e $|B| = k$ si determini, in funzione di n, m, k, h la cardinalità degli insiemi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \left\{ f \in Y^X \;\middle|\; f(A) \cap B \neq \varnothing \right\} \\ \mathcal{F}_2 &= \left\{ f \in Y^X \;\middle|\; f \text{ è iniettiva e } |f(A) \cap B| = 1 \right\} \end{aligned}$$

[Suggerimento per il primo punto: si osservi che $\mathcal{F}_1$ è il complementare di $\left\{ f \in Y^X \;\middle|\; f(A) \cap B = \varnothing \right\}$.]

Esercizio 3 Dire se il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 112 & \mod 72 \\ x \equiv 4 & \mod 330 \end{cases}$$

ammette soluzioni ed in tal caso determinarle.

Esercizio 4 Si determinino le soluzioni della congruenza $x^{23} \equiv 5 \mod 12$.

Esercizio 5 Sia $a \in \mathbb{Z}$ e $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una successione di interi tali che

$$x_{n+2} = a x_{n+1} + x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si provi che allora $(x_{n+1}, x_n) = (x_1, x_0)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Supponendo che $a \geq 0$ e che $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$ si provi che $x_n \geq a^{n-1}$ per ogni $n \geq 1$.

Domanda di teoria. Si dia la definizione di massimo comun divisore tra numeri interi e si enunci e si dimostri il teorema di esistenza e unicità del massimo comun divisore.

Soluzioni proposte

Soluzione dell'esercizio 1 Date due funzioni $f \in X^A$ e $g \in Y^A$ definiamo $\varphi_{f,g} : A \to X \times Y$ ponendo $\varphi_{f,g}(a) = (f(a), g(a))$. Si ottiene quindi una funzione $\Phi : X^A \times Y^A \to (X \times Y)^A$ ponendo $\Phi(f, g) = \varphi_{f,g}$. Proviamo che Φ è una bigezione.
Φ è iniettiva. Se $\Phi(f, g) = \Phi(f', g')$ allora $\varphi_{f,g} = \varphi_{f',g'}$, ossia per ogni $a \in A$ si ha

$$\begin{aligned} \varphi_{f,g}(a) = \varphi_{f',g'}(a) \quad &\iff \quad (f(a), g(a)) = (f'(a), g'(a)) \\ &\iff \quad f(a) = f'(a) \text{ e } g(a) = g'(a) \end{aligned}$$

per l'arbitrarietà di $a \in A$ questo significa che $f = f'$ e $g = g'$ ossia che $(f, g) = (f', g')$.
Φ è surgettiva. Sia $h : A \to X \times Y$ e siano $\pi_X : X \times Y \to X$ e $\pi_Y : X \times Y \to X$ le funzioni definite da $\pi_X(x, y) = x$ e $\pi_Y(x, y) = y$. Siano $f : A \to X$ e $g : A \to Y$ definite da $f = \pi_X \circ h$ e $g = \pi_Y \circ h$. Proviamo che $\Phi(f, g) = h$. Infatti se $a \in A$ si ha che

$$\varphi_{f,g}(a) = (f(a), g(a)) = (\pi_X(h(a)), \pi_Y(h(a))) = h(a)$$

e quindi, per l'arbitrarietà di $a \in A$, $\Phi(f, g) = \varphi_{f,g} = h$. ❑

Soluzione dell'esercizio 2 Come suggerito, osserviamo che $\mathcal{F}_1$ è il complementare di $\overline{\mathcal{F}_1} = \{f \in Y^X \mid f(A) \cap B = \varnothing\}$ e quindi $|\mathcal{F}_1| = |Y^X| - |\overline{\mathcal{F}_1}| = m^n - |\overline{\mathcal{F}_1}|$. Ma ora osserviamo che

$$\overline{\mathcal{F}_1} = \{f \in Y^X \mid f(A) \subseteq Y - B = \varnothing\}$$

e quindi $|\overline{\mathcal{F}_1}| = (m - k)^h m^{n-h}$ (si veda la soluzione dell'esercizio della prova dell'anno scorso) e quindi

$$|\mathcal{F}_1| = m^n - (m - k)^h m^{n-h} = m^{n-h}(m^h - (m - k)^h).$$

❑

Soluzione dell'esercizio 3 Il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x \equiv 50 & \mod 72 \\ x \equiv 4 & \mod 330 \end{cases}$$

ha soluzione se e solo se $(330, 72) \mid (50 - 4) = 46$. Usiamo l'algoritmo di Euclide per il calcolo del M.C.D. tra 330 e 72.

$$\begin{aligned} 330 &= 72 \cdot 4 + 42 \\ 72 &= 42 \cdot 1 + 30 \\ 42 &= 30 \cdot 1 + 12 \\ 30 &= 12 \cdot 2 + 6 \\ 4 &= 2 \cdot 2 \end{aligned}$$

quindi $(218, 102) = 2$ e pertanto il sistema è risolubile.

Esprimiamo 2 come combinazione intera di 218 e 102.

$$\begin{array}{rcl}
2 & = & 14 + 4 \cdot (-3) \\
4 & = & 102 + 14 \cdot (-7) \quad \Rightarrow \quad 2 = 14 + (102 + 14 \cdot (-7))(-3) \\
 & & \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; = 14 \cdot (22) + 102 \cdot (-3) \\
14 & = & 218 + 102 \cdot (-2) \quad \Rightarrow \quad 2 = (218 + 102 \cdot (-2)) \cdot (22) + 102 \cdot (-3) \\
 & & \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; = 218 \cdot (22) + 102 \cdot (-47)
\end{array}$$

Quindi, $31 - 27 = 218 \cdot (44) + 102 \cdot (-94)$ da cui

$$31 + 102 \cdot 94 = 27 + 218 \cdot 44 = 9619$$

è una soluzione del sistema di congruenze. L'insieme delle soluzioni è allora dato da

$$\begin{array}{rcl}
\{9619 + k[218, 102] \mid k \in \mathbb{Z}\} & = & \{9619 + k218 \cdot 51 \mid k \in \mathbb{Z}\} \\
 & = & \{9619 + k11118 \mid k \in \mathbb{Z}\}.
\end{array}$$

❏

Soluzione dell'esercizio 4 ❏

Soluzione dell'esercizio 5

❏