1 Esercizi su insiemi, funzioni, calcolo combinatorio

a cura di Michela Pagliacci

I seguenti esercizi sono riferiti agli argomenti svolti nelle lezioni di esercitazione del 2.05.2002 e del 9.05.2002

1. Siano A e B insiemi. Dimostrare che:
   $A \subseteq B \Rightarrow (B \setminus A) \cap A = \emptyset$ e $(B \setminus A) \cup A = B$.

2. Siano A, B, C insiemi. Dimostrare che:
   $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = C \Rightarrow A = C \setminus B$.

3. Dati $\mathbb{Z}^- = \{z \in \mathbb{Z} : z < 0\}$, l'insieme degli interi negativi, e $2\mathbb{Z} := \{z \in \mathbb{Z} : z$ è pari$\}$, l'insieme degli interi pari, calcolare $\mathbb{Z}^- \triangle 2\mathbb{Z}$.

4. Siano A e B insiemi. Posto $C = A \triangle B$ dire qual è l'insieme $C \triangle A$ e fornire una dimostrazione della risposta.

5. Dati due insiemi A e B, dimostrare l'uguaglianza: $A \times B = \bigcup_{a \in A}(\{a\} \times B)$ e che gli insiemi del tipo $\{a\} \times B$ sono a due a due disgiunti.

6. Dati A un insieme di cardinalità n e B un insieme di cardinalità m e supposto che $m \leq n$, cosa si può dire su $|A \cap B|$?

7. Considerati due insiemi finiti A e B tali che $|A| = 4$ e $|B| = 7$, risolvere i seguenti quesiti:

   (a) Quali tra i numeri $4, 7, 8, 9, 11, 13, 20$ potrebbero essere uguali ad $|A \cup B|$?

   (b) Sono di più le funzioni da A a B o quelle da B ad A? Motivare la risposta.

   (c) Calcolare il numero di funzioni iniettive di B^A ed il numero di funzioni iniettive di A^B.

   (d) Posto che $|A \cap B| = 1$, calcolare il numero di sottinsiemi di cardinalità 3 di $A \cup B$.

8. Sia X un insieme di cardinalità 8 ed $A \subset X$ tale che $|A| = 4$. Calcolare:

   (a) Il numero di sottinsiemi propri di X disgiunti da A.

   (b) Il numero di sottinsiemi di X che contengono A.

(c) Il numero di sottinsiemi di X che hanno in comune esattamente un elemento con A.

(d) Il numero di sottinsiemi di X che hanno in comune esattamente 3 elementi con A.

(e) Il numero di sottinsiemi di X che hanno in comune 2 elementi con A.

(f) Il numero di sottinsiemi di X che non sono disgiunti da A.

9. Sia $f : \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \to \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ una funzione iniettiva.

   (a) Cosa si può dire su $|f^{-1}(0)|$?

   (b) E su $|f^{-1}(\{0,8\})|$?

   (c) Quante sono le f iniettive che si possono costruire tra questi due insiemi?

   (d) Quante sono le f iniettive che si possono costruire con la proprietà che $f(1) = 3$?

10. Sia $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $g(n) = \begin{cases} n/2, & \text{se } n \text{ è pari} \\ (n+1)/2, & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$
    Studiare l'iniettività e la suriettività di g. Dire se esiste f tale che $g \circ f = 1_{\mathbb{Z}}$. Sia $A = \{1,2,4\}$ calcolare $g^{-1}(g(A))$ e dire se coincide con A.

11. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{se } n \text{ è un quadrato perfetto} \\ n, & \text{altrimenti} \end{cases}$
    Studiare l'iniettività e la suriettività di f. Se $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è definita da $g(n) = n^2$, è vero che $g \circ f = 1_{\mathbb{N}}$? Trovare, se esiste, una funzione $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale $f \circ \psi = 1_{\mathbb{N}}$. Sia $A = \{3,4,16\}$ calcolare $f^{-1}(f(A))$ e dire se coincide con A. Se $B = \{2,3,16\}$ che cosa si può dire di $f(A \cap B)$ in relazione a $f(A)$ e $f(B)$?