2 Esercizi su calcolo combinatorio, divisibilità e congruenze

a cura di Michela Pagliacci

I seguenti esercizi sono riferiti agli argomenti svolti nelle lezioni di esercitazione del 16.05.2002 e del 23.05.2002

1. Per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$ si definisca $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ e

   $$S_n = \{T \subseteq [n] \text{tale che } T \text{ non contiene due interi consecutivi}\}.$$

   a) Dimostrare che $|S_n|$ è l'n-esimo numero di Fibonacci, ovvero che $|S_n| = f(n) = f(n-1) + f(n-2)$, per ogni $n \geq 2$, con $f(0) = 1$ e $f(1) = 2$

   b) Dimostrare per induzione su n che $f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$, dove $f(0) = 1$ e $f(1) = 2$ per il punto a).

2. Dimostrare per induzione su n che $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ per ogni $n \geq 1$.

3. Dimostrare che $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$.

4. Dimostrare che $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$.

5. Dimostrare usando la definizione di coefficiente binomiale che:
   $n^2 = \binom{n}{2} + \binom{n+1}{2}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$

6. Dare un'interpretazione combinatoria, ovvero trovare una biiezione fra insiemi di cardinalità opportuna, della seguente uguaglianza:

   $$n^2 = \frac{n!}{(n-2)!} + n$$

   [Sugg. Pensare a come possono essere le funzioni da un insieme di 2 elementi ad uno di n elementi]

7. Si consideri la successione definita per ricorsione da:
   $$\begin{cases} f(n+2) = 3f(n+1) + 4f(n) \\ f(0) = -1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$$
   Dimostrare che per induzione su n che $f(n)$ è dispari per ogni n.
   Dimostrare per induzione su n che $f(n) = \frac{1}{5}\left[7(-1)^{n+1} + \frac{1}{2}4^{n+1}\right]$

8. Si consideri la successione definita per ricorsione da:
$$\begin{cases} f(n+2) = 3f(n+1) + f(n) \\ f(0) = 1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$$
Dimostrare che $(f(n+2), f(n+1)) = 1$.

9. Quale parola di 13 lettere dà luogo al maggior numero di anagrammi? Quale al minor numero?

10. Calcolare, utilizzando l'algoritmo di Euclide, i seguenti:
    - $(26, 19)$ [risp. 1];
    - $(187, 34)$ [risp. 17];
    - $(841, 160)$ [risp. 1];
    - $(2613, 2171)$ [risp. 13];
    - $(1547, 560)$ [risp.7];
    - $(2784, 356)$ [risp.4].

11. Quanti sono i divisori di 345? Elencarli tutti. Calcolare $\Phi(345)$.

12. Ha più divisori 345 o 225?

13. Trovare $\Phi(m)$ per ogni m da 90 a 100.

14. Trovare, se esiste, una soluzione delle seguenti congruenze lineari:
    a) $31x \equiv 15 \mod 81$
    b) $103x \equiv 612 \mod 676$
    c) $27x \equiv 25 \mod 256$
    d) $27x \equiv 72 \mod 384$
    e) $51x \equiv 99 \mod 102$
    f) $9x \equiv 12 \mod 21$

15. Trovare una soluzione delle seguenti congruenze:
    a) $x^3 \equiv 2 \mod 11$
    b) $x^9 \equiv 5 \mod 23$
    c) $x^5 \equiv 16 \mod 27$

16. Trovare, se possibile, la minima soluzione positiva dei seguenti sistemi di congruenze:

a) $\begin{cases} x \equiv 3 \mod 5 \\ x \equiv 5 \mod 16 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \equiv 12 \mod 31 \\ x \equiv 87 \mod 127 \\ x \equiv 91 \mod 255 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \equiv 103 \mod 900 \\ x \equiv 511 \mod 841 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \equiv 17 \mod 27 \\ x \equiv 41 \mod 42 \end{cases}$

17. Trovare il più piccolo intero positivo che dà resto 1 quando diviso per 11, resto 2 quando diviso per 12 e resto 3 quando diviso per 13.

18. Calcolare, se esiste l'inverso di:

- $12 \mod 27$
- $12 \mod 36$
- $9 \mod 11$

19. Elencare gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_{15}$.
Calcolare se esiste l'inverso di $7 \mod 15$.