Matematica Discreta (II modulo)

Primo appello, a.a. 2003/2004 — compito 1

19 aprile 2004

Da svolgersi in tre ore. Al candidato si richiede di svolgere almeno un esercizio di ciascuno dei due gruppi e di rispondere ad almeno una delle domande teoriche. **Tutte le risposte devono essere motivate**.

Non è ammessa la consultazione di libri e/o appunti.

Esercizio 1 Dire se il seguente sistema di congruenze ammette soluzioni ed in tal caso determinarle tutte:

$$\begin{cases} x \equiv -7 \mod 21 \\ x \equiv 41 \mod 81 \end{cases}$$

Esercizio 2 Un musicista jazz vuole formare una band composta da 4 sassofonisti, 2 trombettisti, 3 percussionisti, 2 chitarristi.
Alle selezioni si presentano 10 sassofonisti, 9 trombettisti, 4 percussionisti e 5 chitarristi.

1. Quante sono le possibili band che può formare?
2. Il musicista decide di selezionare anche due cantanti da scegliere fra 4 candidate, come cambia il numero determinato al punto precedente?
3. Supponendo che il musicista abbia scelto la band, in quanti modi può selezionare da questa un trio di solisti composto da 1 sax, 1 chitarra, 1 percussione?

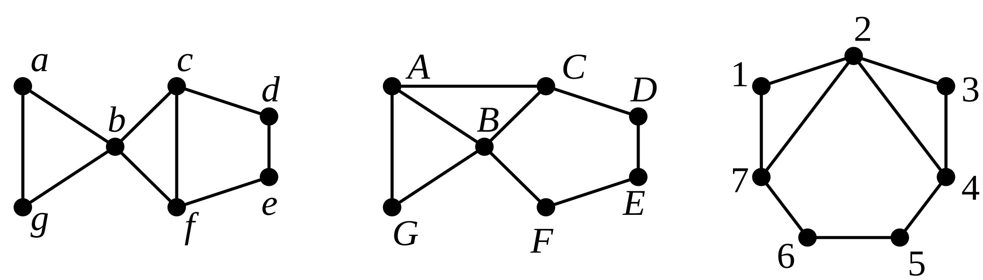
Esercizio 3 Dire, motivando la risposta, quale dei vettori

$$d_1 = (2,2,2,3,3,3,3,4,8,8) \qquad d_2 = (1,1,1,1,2,2,6,6)$$

è lo score di un grafo e quando ciò è possibile costruire un tale grafo. Si dica inoltre se

1. è possibile trovare un tale grafo che sia anche un albero
2. è possibile trovare un tale grafo che sia sconnesso
3. è possibile trovare un tale grafo che sia 2-connesso

Esercizio 4 Dire, motivando la risposta, quali tra i grafi rappresentati in figura sono tra loro isomorfi e quali no.



G_1 G_2 G_3

Domanda di teoria 1. Si dia la definizione di elemento invertibile in $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$, quindi si enunci e si provi il piccolo teorema di Fermat.

Domanda di teoria 2. Si dia la definizione di albero, quindi si enunci e si provi il teorema di caratterizzazione degli alberi finiti (formula di Eulero).

Soluzione dell'esercizio 1 $(21, 81) = 3 \mid 48 = 41 - (-7)$ quindi il sistema è risolubile. Inoltre, usando l'algoritmo di Euclide, si ottiene $3 = 4 \cdot 21 + (-1) \cdot 81$ quindi

$$41 - (-7) = 48 = 16 \cdot 3 = 16 \cdot (4 \cdot 21 + (-1) \cdot 81) = 64 \cdot 21 - 16 \cdot 81$$

e pertanto $x_0 = 1337 = 41 + 16 \cdot 81 = -7 + 64 \cdot 21$ è una soluzione del sistema.

L'insieme delle soluzioni è allora dato da $\{1337 + k[21, 81] \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{1337 + k567 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{203 + k567 \mid k \in \mathbb{Z}\} = [203]_{567}$. ❑

Soluzione dell'esercizio 2 (1). Indichiamo con rispettivamente con S, T, P, C gli insiemi dei sassofonisti, trombettisti, percussionisti e chitarristi che si presentano alla selezione. Si ha $|S| = 10$, $|T| = 9$, $|P| = 4$, $|(| C) = 5$. Da ciascuno di questi insiemi devono essere scelti rispettivamente, 4, 2, 3, 2 elementi, quindi l'insieme $\mathcal{B}$ delle possibili band è in bigezione con l'insieme

$$\binom{S}{4} \times \binom{T}{2} \times \binom{P}{3} \times \binom{C}{2}$$

e quindi il numero di band è dato da

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}| &= \left|\binom{S}{4} \times \binom{T}{2} \times \binom{P}{3} \times \binom{C}{2}\right| = \left|\binom{S}{4}\right| \cdot \left|\binom{T}{2}\right| \cdot \left|\binom{P}{3}\right| \cdot \left|\binom{C}{2}\right| \\ &= \binom{|S|}{4} \cdot \binom{|T|}{2} \cdot \binom{|P|}{3} \cdot \binom{|C|}{2} = \binom{10}{4} \cdot \binom{9}{2} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{5}{2} = 210 \cdot 36 \cdot 4 \cdot 10 = 302400 \end{aligned}$$

(2). Per lo stesso motivo del punto precedente, il numero di possibili scelte delle cantanti è $\binom{4}{2} = 6$, e quindi il numero delle [possibili band viene moltiplicato per 4, e diventa 1807200.

(3). Detti ora S, C, P gli insiemi dei sassofonisti, dei chitarristi e dei percussionisti della band, l'insieme $\mathcal{T}$ dei possibili trii è allora in bigezione con l'insieme $S \times C \times P$ e quindi ha cardinalità pari a

$$|\mathcal{T}| = |S \times C \times P| = |S| \cdot |C| \cdot |P| = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24.$$

❑

Soluzione dell'esercizio 3 Se $G = (V, E)$ è un grafo tale che $\text{score}(G) = d_2$ allora $|V| = 8$ e ci sono due vertci di grado 6, chiamiamoli u e v. Ma allora i vertci che sono adiacenti sia a u che a v devono essere almeno 4 (in un insieme con 8 elementi due sottinsiemi dicardinalità 6 hanno intersezione di cardinalità almeno 4) e quindi ci dovrebbero essere almeno 4 vertici diversi da u e v con grado almeno 2.. Ciò è in contraddizione con il fatto che di vertici di grado ≥ 2 e diversi da u e v ce ne dovrebbero essere soltanto 2.

Per d_1 usiamo il teorema dello score:

$$\begin{aligned} d_1 &= (2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 8, 8) \\ d_1' &= (2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 7) \\ d_1' &= (1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 7) \\ d_1'' &= (1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2) \\ d_1'' &= (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2) \\ d_1''' &= (0, 1, 1, 1, 1, 0, 0) \end{aligned}$$

Dato che d_1''' è realizzabile come score di un grafo, anche d_1 lo è. La costruzione standard produce il grafo in figura 1 che è 2-connesso.

(1). La risposta è no. Ogni albero finito havertici di grado 1, mentre in un tale grafo ogni vertice ha grado ≥ 2..

(2). La risposta è no. Se $G = (V, E)$ è un grafo tale che $\text{score}(G) = d_1$ allora esiste $v \in V$ tale che $\deg(V) = 8$, ossia ogni altro vertice, tranne uno, è adiacente e quindi congiungibile con v. D'altra parte l'unico vertice non ancora considerato ha grado positivo, e quindi deve essere congiungibile con almeno uno degli altri. Quindi G è connesso.

(3). Che il grafo di figura **??** sia 2-connesso lo si può vedere ad esempio mostrando che è ottenuto da un ciclo con successive aggiunzioni e suddivisioni di lati. ❑

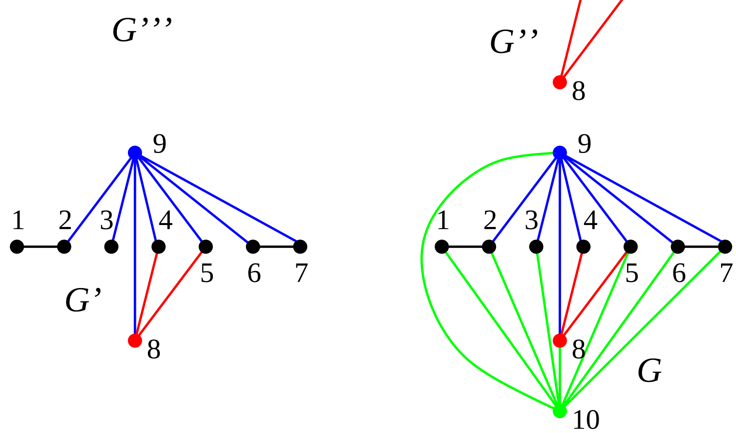


Figura 1: Il grafo costruito per la soluzione dell'esercizio 3. La configurazione di partenza è data dai vertici $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, e dai lati $\{1, 2\}, \{6, 7\}$ che realizzano lo score d_1''' a cui sono successivamente aggiunti i vertici 8, 9 e 10 ottenendo dei grafi, che realizzano, nell'ordine, gli score d_1'', d_1' e d_1.

Soluzione dell'esercizio 4 G_1 non è 2-connesso, infatti $G - b$ è dato dall'unione disgiunte di un P_2 e di un C_4. mentre i grafi G_2 e G_3 sono hamiltoniani (e quindi quindi 2-connessi) in quanto contengono rispettivamente i cicli (A, C, D, E, F, B, G, A) e $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1)$.

Di conseguenza $G_1 \not\cong G_2$ e $G_1 \not\cong G_3$.

$G_2 \not\cong G_3$, dato che entrambi hanno solo due vertici di grado 3, ma in G_2 essi sono congiunti da un lato, mentre in G_3 no. ❑