Matematica Discreta (II modulo)

Primo appello, a.a. 2003/2004 — compito 2

19 aprile 2004

Da svolgersi in tre ore. Al candidato si richiede di svolgere almeno un esercizio di ciascuno dei due gruppi e di rispondere ad almeno una delle domande teoriche. **Tutte le risposte devono essere motivate.**

Non è ammessa la consultazione di libri e/o appunti.

Esercizio 1 Dire se il seguente sistema di congruenze ammette soluzioni ed in tal caso determinarle tutte:

$$\begin{cases} x \equiv -3 \mod 35 \\ x \equiv 22 \mod 25 \end{cases}$$

Esercizio 2 Un musicista jazz vuole formare una band composta da 5 sassofonisti, 3 trombettisti, 2 percussionisti, 2 chitarristi.
Alle selezioni si presentano 8 sassofonisti, 7 trombettisti, 5 percussionisti e 3 chitarristi.

1. Quante sono le possibili band che può formare?
2. Il musicista decide di selezionare anche una cantante da scegliere fra 4 candidate, come cambia il numero determinato al punto precedente?
3. Supponendo che il musicista abbia scelto la band, in quanti modi può selezionare da questa un trio di solisti composto da 1 sax, 1 chitarra, 1 percussione?

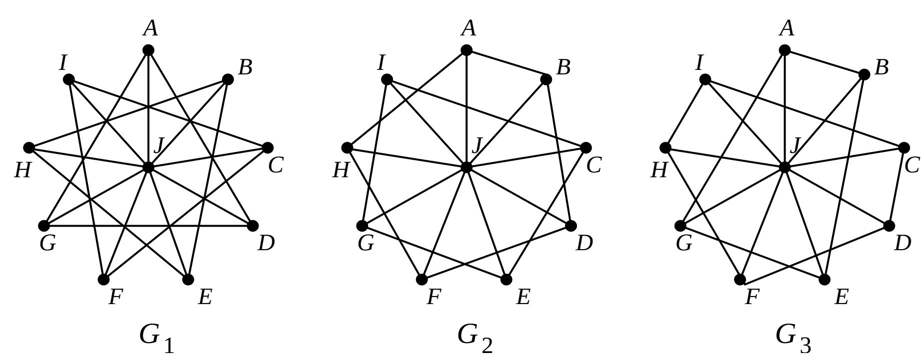
Esercizio 3 Dire, motivando la risposta, quale dei vettori

$$d_1 = (1, 1, 2, 2, 2, 2, 7, 7) \qquad d_2 = (1, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 6, 7, 9)$$

è lo score di un grafo e quando ciò è possibile costruire un tale grafo. Si dica inoltre se

1. è possibile trovare un tale grafo che sia anche un albero
2. è possibile trovare un tale grafo che sia connesso
3. è possibile trovare un tale grafo che sia 2-connesso

Esercizio 4 Dire, motivando la risposta, quali tra i grafi rappresentati in figura sono tra loro isomorfi e quali no.



Domanda di teoria 1. Si dia la definizione di elemento invertibile in $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$, quindi si enunci e si provi il piccolo teorema di Fermat.

Domanda di teoria 2. Si dia la definizione di albero, quindi si enunci e si provi il teorema di caratterizzazione degli alberi finiti (formula di Eulero).

Soluzione dell'esercizio 1 $(35, 25) = 5 \mid 25 = 22 - (-3)$ quindi il sistema è risolubile. Usando l'algoritmo di Euclide, si ottiene $5 = 3 \cdot 25 + (-2) \cdot 35$ quindi

$$22 - (-3) = 25 = 5 \cdot 5 = 5(3 \cdot 25 + (-2) \cdot 35) = 15 \cdot 25 - 10 \cdot 35$$

pertanto $x_0 = 22 - 15 \cdot 25 = -3 - 10 \cdot 35 = -353$ è una soluzione del sistema. L'insieme delle soluzioni è allora dato da $\{-353 + k[25, 35] \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{-353 + k175 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{172 + k175 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. ❑

Soluzione dell'esercizio 2 (1). Indichiamo con rispettivamente con S, T, P, C gli insiemi dei sassofonisti, trombettisti, percussionisti e chitarristi che si presentano alla selezione. Si ha $|S| = 8$, $|T| = 7$, $|P| = 5$, $|(|\, C) = 3$. Da ciascuno di questi insiemi devono essere scelti rispettivamente, 5, 3, 2, 2 elementi, quindi l'insieme $\mathcal{B}$ delle possibili band è in bigezione con l'insieme

$$\binom{S}{5} \times \binom{T}{3} \times \binom{P}{2} \times \binom{C}{2}$$

e quindi il numero di band è dato da

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}| &= \left|\binom{S}{5} \times \binom{T}{3} \times \binom{P}{2} \times \binom{C}{2}\right| = \left|\binom{S}{5}\right| \cdot \left|\binom{T}{3}\right| \cdot \left|\binom{P}{2}\right| \cdot \left|\binom{C}{2}\right| \\ &= \binom{|S|}{5} \cdot \binom{|T|}{3} \cdot \binom{|P|}{2} \cdot \binom{|C|}{2} = \binom{8}{5} \cdot \binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = 56 \cdot 35 \cdot 10 \cdot 3 = 58800 \end{aligned}$$

(2). Il numero di possibili scelte della cantante è evidentemente 4, e quindi il numero delle [possibili band viene moltiplicato per 4, e diventa 235200.

(3). Detti ora S, C, P gli insiemi dei sassofonisti, dei chitarristi e dei percussionisti della band, l'insieme $\mathcal{T}$ dei possibili trii è allora in bigezione con l'insieme $S \times C \times P$ e quindi ha cardinalità pari a

$$|\mathcal{T}| = |S \times C \times P| = |S| \cdot |C| \cdot |P| = 5 \cdot 2 \cdot 2 = 20.$$

❑

Soluzione dell'esercizio 3 Un grafo G tale che score$(G) = d_1$ dovrebbe avere 8 vertici, di cui due di grado 7, ossia adiacenti a tutti gli altri. Ma allora ogni vertice dovrebbe avere grado almeno 2. Questo cotraddice il fatto che dovrebbero esserci anche due vertici di grado 1.

Per d_2 usiamo il teorema dello score:

$$\begin{aligned} d_2 &= (1, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 6, 7, 9) \\ d_2' &= (1, 0, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 5, 6) \\ d_2' &= (0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 5, 6) \\ d_2'' &= (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4) \\ d_2''' &= (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

Dato che d_2''' è realizzabile come score di un grafo, anche d_2 lo è. La costruzione standard produce il grafo in figura 1.

(1). La risposta è no. Se $G = (V, E)$ è un grafo tale che score$(G) = d_2$ allora $|V| = 11$ e $|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \deg v = \frac{1}{2}(1 + 1 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 + 4 + 6 + 7 + 9) = 21$. Ma allora $|E| = 21 \neq 10 = |V| - 1$, quindi G non può essere un albero.

(2). La risposta è sì. Basta prendere il grafo che si è costruito in precedenza (figura 1). In realtà si può mostrare che ogni tale grafo è necessariamente connesso, dato che ha 11 vertici, un vertice di grado 9 e quindi adiacente ad ogni altro vertice tranne uno, e quest'ultimo vertice avendo grado positivo, sarà necessariamente adiacente ad uno dei precedenti.

(3). La risposta è no. Se $G = (V, E)$ è un grafo tale che score$(G) = d_2$ allora ha un vertice di grado 1, quindi non può essere 2-connesso. ❑

Soluzione dell'esercizio 4 Tutti i grafi hanno un unico vertice di grado massimo (in tutti e tre i casi è il vertice J), 9 e quindi sono isomorfi se e solo se lo sono privati di questo vertice. Questo perchè se v ha grado massimo in G allora G è ottenuto da $G - v$ aggiungendo un vertice collegato con tutti gli altri lati.

Ma ora $G_1 - J$ è costituito dall'unione disgiunta di tre copie di C_3 (ha quindi 3 componenti connesse), mentre $G_2 - J$ e $G_3 - J$ sono entrambi costituiti dall'unione disgiunta di un C_4 e un C_5 (in particolare hanno due componenti connesse). Quindi $G_2 \cong G_3$, mentre $G_1 \not\cong G_2$ e $G_1 \not\cong G_3$. Un isomorfismo $G_2 \to G_3$ è dato ad esempio da: $A \to I$, $B \to C$, $C \to B$, $D \to D$, $E \to E$, $F \to F$, $G \to G$, $H \to H$ $I \to A$ e $J \to J$. ❑

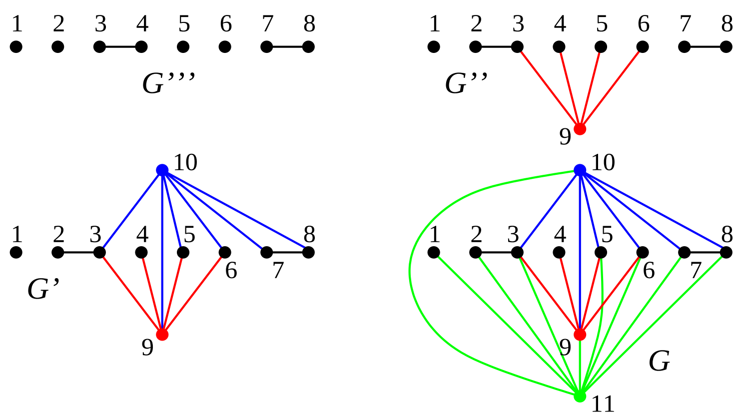


Figura 1: Il grafo costruito per la soluzione dell'esercizio 3. La configurazione di partenza è data dai vertici $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,$ e dai lati $\{2, 3\}, \{7, 8\}$ che realizzano lo score d_2''' a cui sono successivamente aggiunti i vertici 9, 10 e 11 ottenendo dei grafi, che realizzano, nell'ordine, gli score d_2'', d_2' e d_2.