Matematica Discreta (II modulo)

Quarto appello, a.a. 2003/2004

13 settembre 2004

Da svolgersi in tre ore. Al candidato si richiede di svolgere almeno un esercizio di ciascuno dei due gruppi e di rispondere ad almeno una delle domande teoriche. **Tutte le risposte devono essere motivate**.

Non è ammessa la consultazione di libri e/o appunti.

Esercizio 1 Dire, motivando la risposta, se il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 20 \mod 117 \\ x \equiv 11 \mod 81 \end{cases}$$

ammette soluzioni ed in tal caso determinarle tutte.

Esercizio 2 Siano A e B due insiemi finiti con $|A| = n$ e $|B| = m$ e sia $a \in A$.

1. Denotato $k = |A \cap B|$, si determini, in funzione di n, m e k, la cardinalità dell'insieme $\{Y \subseteq A \cup B \mid a \in Y\}$.
2. Sia $b \in B$. Si determini la cardinalità dell'insieme $\{f \in B^A \mid f(a) = b\}$.

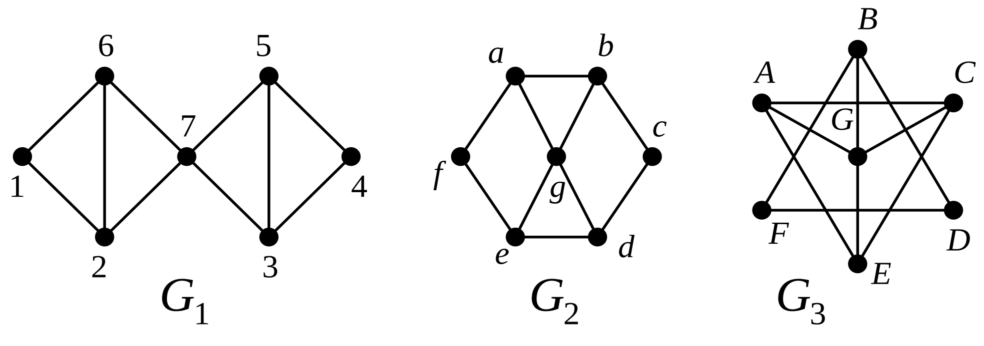
Esercizio 3 Dire, motivando la risposta, quale dei vettori

$$d_1 = (3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 12) \qquad d_2 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5)$$

è lo score di un grafo e quando ciò è possibile costruire un tale grafo. Si dica inoltre se

1. è possibile trovare un tale grafo che sia anche un albero
2. è possibile trovare un tale grafo che sia sconnesso
3. è possibile trovare un tale grafo che sia 2-connesso

Esercizio 4 Dire, motivando la risposta, quali tra i grafi rappresentati in figura sono tra loro isomorfi e quali no.



Domanda di teoria 1. Si dia la definizione di Massimo Comun Divisore di numeri interi. Si enunci e si provi il teorema di esistenza e unicità del MCD.

Domanda di teoria 2. Si diano le definizioni di relazione d'equivalenza e di cammino in un grafo. Si provi che la relazione di congiungibilità con cammini è una relazione d'equivalenza sull'insieme dei vertici di un grafo.

Soluzioni proposte

Soluzione dell'esercizio 1 $(117, 81) = 9 \Big| -9 = 20$ quindi i - 11 sistema e' risolubile. Inoltre $9 = (-2) \cdot 117 + (3) \cdot 81$ quindi $20 - 11 = 9 = (-2) \cdot 117 + (3) \cdot 81$ quindi $x_0 = 254 = 20 + 2 \cdot 117 = 11 + 3 \cdot 81$ è una soluzione del sistema. Tutte le soluzioni sono allora date da $\{254 + k[81, 117] \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{254 + k1053 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ❏

Soluzione dell'esercizio 2 (1). L'insieme $\mathcal{A} = \{Y \subseteq A \cup B \mid a \in Y\}$ è in bigezione con l'insieme $\{Y \subseteq A \cup B \setminus \{a\}\} = 2^{A \cup B \setminus \{a\}}$. Una bigezione è data ad esempio dalla funzione $\Phi : \mathcal{A} \to 2^{A \cup B \setminus \{a\}}$ definita da

$$\Phi(A) = A \setminus \{a\}$$

la cui inversa è data da $\Psi : 2^{A \cup B \setminus \{a\}} \to \mathcal{A}$ definita da

$$\Psi(A) = A \cup \{a\}.$$

Ma allora $|\mathcal{A}| = \left|2^{A \cup B \setminus \{a\}}\right| = 2^{|A \cup B \setminus \{a\}|} = 2^{|A \cup B| - 1} = 2^{n+m-k-1}$, dato che $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
(2). L'insieme $\mathcal{B} = \{f \in B^A \mid f(a) = b\}$ è in bigezione con l'insieme $B^{A \setminus \{a\}}$. Una bigezione è data ad esempio dalla funzione $\Phi : \mathcal{B} \to B^{A \setminus \{a\}}$ definita da

$$\Phi(f) = f\big|_{A \setminus \{a\}}$$

la cui inversa è la funzione $\Psi : B^{A \setminus \{a\}} \to \mathcal{B}$ definita da

$$\Psi(g) : x \mapsto \left\langle \begin{array}{ll} f(x) & \text{se } x \neq a \\ b & \text{se } x = a \end{array} \right.$$

Ma allora $|\mathcal{B}| = \left|B^{A \setminus \{a\}}\right| = m^{n-1}$ ❏

Soluzione dell'esercizio 3 d_1 non può essere lo score di un grafo, dato che contiene un numero dispari (9) di elementi dispari.

d_2 è lo score di un grafo, ad esempio se si usa il teorema dello score:

$$\begin{aligned} d_2 &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5) \\ d_2' &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 2, 2, 3) \\ d_2' &= (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3) \\ d_2'' &= (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1) \end{aligned}$$

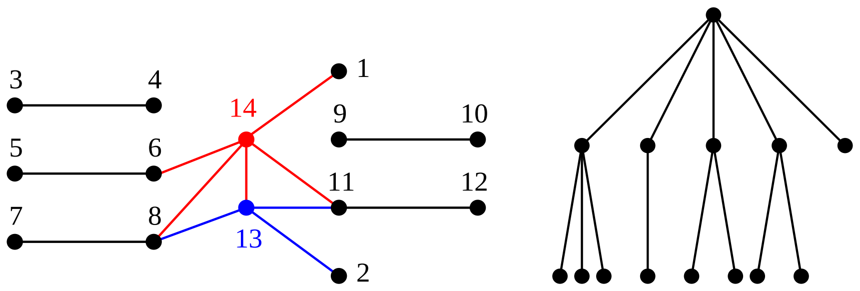


Figura 1: Sulla sinistra il grafo costruito per la soluzione dell'esercizio 3 a partire dalla riduzione di d_2. La configurazione di partenza è data dai vertici $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$, e dai lati $\{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}, \{9, 10\}, \{11, 12\}$ che realizzano lo score d_2'' a cui sono successivamente aggiunti i vertici 13 e 14 ottenendo dei grafi, che realizzano, nell'ordine, gli score d_2' e d_2. Sulla sinistra un albero che ha d_2 come score.

(1). La risposta è sì. Basta prendere ad esempio il grafo sulla destra di figura 1.
(2). La risposta è sì. Basta prendere ad esempio il grafo sulla sinistra di figura 1.
(3). La risposta è no, dato che in un grafo 2-connesso non possono esserci vertici di grado 1.
❏

Soluzione dell'esercizio 4 G_2 è hamiltoniano, ad esempio (a, g, b, c, d, e, f, a) è un ciclo hamiltoniano di G_2. In particolare G_2 è 2-connesso. G_1 e G_3 non sono 2-connessi, dato che $G_1 - 7$ e $G_3 - G$ sono isomorfi all'unione disgiunta di due 3-cicli. Quindi $G_1 \not\cong G_2$ e $G_2 \not\cong G_3$.

In G_3 gli unici due vertici di grado 2 sono congiunti da un lato, mentre in G_1 i due vertici di grado 2 non sono adiacenti. Quindi $G_1 \not\cong G_3$. ❏