Matematica Discreta (II modulo)

Primo appello, a.a. 2004/2005 — compito 2

21 giugno 2005

Da svolgersi in tre ore. Al candidato si richiede di svolgere almeno un esercizio di ciascuno dei due gruppi e di rispondere ad almeno una delle domande teoriche. **Tutte le risposte devono essere motivate**.
Non è ammessa la consultazione di libri e/o appunti.

Esercizio 1 Dire se il seguente sistema di congruenze ammette soluzioni ed in tal caso determinarle tutte:

$$\begin{cases} x \equiv -9 & \mod 1386 \\ x \equiv 54 & \mod 315 \end{cases}$$

Esercizio 2 Sia $A = \{u \in \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} : u \text{ è invertibile}\}$ e $B = \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$. Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi:

1. $\{f \in B^A : \text{ f è iniettiva}\}$.
2. $\{f \in B^A : \text{ f è iniettiva}, f(\bar{1}) = \bar{0}\}$.
3. $\{f \in B^A : f(A) = C\}$, essendo $C = \{\bar{2}, \bar{3}\}$.

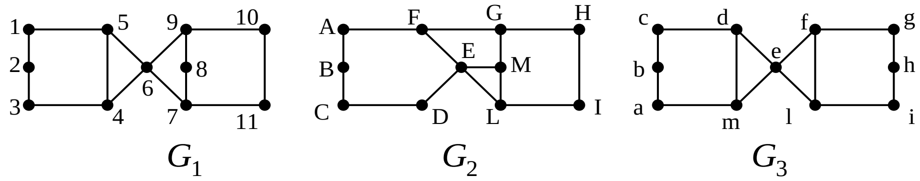
Esercizio 3 Dire, motivando la risposta, quale dei vettori

$$d_1 = (1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 7, 9) \qquad d_2 = (2, 2, 3, 3, 4, 4, 7, 7)$$

è lo score di un grafo e quando ciò è possibile costruire un tale grafo. Si dica inoltre se

1. è possibile trovare un tale grafo che sia anche un albero
2. è possibile trovare un tale grafo che sia sconnesso
3. è possibile trovare un tale grafo che sia 2-connesso

Esercizio 4 Dire, motivando la risposta, quali tra i grafi rappresentati in figura sono tra loro isomorfi e quali no.



Domanda di teoria 1. Si enunci e si provi il teorema di rappresentazione dei numeri naturali in una base fissata. Si descriva un algoritmo ricorsivo per trovare la rappresentazione in una data base di un numero.

Domanda di teoria 2. Si dia la definizione di albero, quindi si enunci e si provi il teorema di caratterizzazione degli alberi finiti (formula di Eulero).

Soluzioni proposte

Soluzione dell'esercizio 1 $(315, 1386) = 63 \mid 63 = 54 - (-9)$ quindi il sistema è risolubile. Usando l'algoritmo di Euclide, si ottiene $63 = 9 \cdot 315 + (-2) \cdot 1386$ quindi

$$54 - (-9) = 63 = \cdot 9 \cdot 315 + (-2) \cdot 1386$$

pertanto $x_0 = 54 - 9 \cdot 315 = -9 - 2 \cdot 1386 = -2781$ è una soluzione del sistema. L'insieme delle soluzioni è allora dato da $\{-2781 + k[1386, 315] \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{-2781 + k6930 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{4149 + k6930 \mid k \in \mathbb{Z}\} = [4149]_{6930}$. ❏

Soluzione dell'esercizio 2 (1). $\left|\{f \in B^A : \text{ f è iniettiva}\}\right| = \frac{|B|!}{(|B|-|A|)!} = \frac{18!}{(18-\Phi(18))!} = \frac{18!}{(18-6)!} = \frac{18!}{12!} = 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 = 13366080$.

(2). Sia $B' = \mathbb{Z}/_{18\mathbb{Z}} \setminus \{\bar{0}\}$ e $A' = (\mathbb{Z}/_{18\mathbb{Z}})^* \setminus \{\bar{1}\}$, allora l'insieme $\{f \in B^A : \text{ f è iniettiva}, f(\bar{1}) = \bar{0}\}$ è evidentemente in bigezione con $\{f \in B'^{A'} : \text{ f è iniettiva}\}$ e quindi $\left|\{f \in B^A : \text{ f è iniettiva}, f(\bar{1}) = \bar{0}\}\right| = \left|\{f \in B'^{A'} : \text{ f è iniettiva}\}\right| = 17!/12! = 742560$.

(3). L'insieme $\{f \in B^A : f(A) = C\}$ coincide con l'insieme $f \in C^A \mid f\text{non è costante}\}$. Quindi la sua cardinalità è pari a $|C|^{|A|} - 1 = 2^6 - 1 = 63$. ❏

Soluzione dell'esercizio 3 Un grafo G tale che score$(G) = d_1$ dovrebbe avere 10 vertici, di cui due, chiamiamoli u e v, di grado rispettivamente 7 e 9. Ma allora i vertci che sono adiacenti sia a u che a v devono essere almeno 6 (in un insieme con 10 elementi due sottinsiemi di cardinalità 7 e 9 hanno intersezione di cardinalità almeno $9 + 7 - 10 = 6$) e quindi ci dovrebbero essere almeno 6 vertici diversi da u e v con grado almeno 2. Ciò è in contraddizione con il fatto che di vertici di grado ≥ 2 e diversi da u e v ce ne dovrebbero essere soltanto 4.

Per d_2 usiamo il teorema dello score:

$$\begin{aligned} d_2 &= (2, 2, 3, 3, 4, 4, 7, 7) \\ d_2' &= (1, 1, 2, 2, 3, 3, 6) \\ d_2'' &= (0, 0, 1, 1, 2, 2) \end{aligned}$$

Dato che d_2'' è realizzabile come score di un grafo, anche d_2 lo è. La costruzione standard produce il grafo in figura 1.

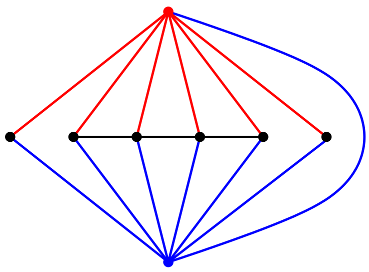


Figura 1: Il grafo costruito per la soluzione dell'esercizio 3. La configurazione di partenza è data dai vertici e lati neri a cui si aggiungono quelli rossi e quelli blu.

(1). La risposta è no. Dato che non ha vertici di grado 1.

(2). La risposta è no. Cè un vertice (anzi due) adiacente a tutti gli altri.

(3). La risposta è di. Il grafo in figura 1 è 2-connesso. Non è difficile mostrare che lo si può ottenere da un ciclo mediante aggiunzioni e suddivisioni di lati. ❏

Soluzione dell'esercizio 4 G_1 non è 2-connesso, infatti $G_1 - e$ è dato dall'unione disgiunte di due C_5. Anche G_3 non è 2-connesso, dato che $G_2 - 5$ è isomorfo all'unione disgiunta di due C_5. Invece G_2 è hamiltoniano (e quindi 2-connesso) in quanto contiene il ciclo $(A, B, C, D, E, M, L, I, H, G, F, A)$.

Di conseguenza $G_1 \ncong G_2$ e $G_2 \ncong G_3$.

Anche $G_1 \ncong G_3$, dato che in G_3 ogni vertice di grado 3 è adiacente ad un altro vertice di grado 3, mentre in G_1 i vertici 7 e 9 hanno grado 3 ma sono adiacenti a vertici di grado 2 e 4.

❏