Matematica Discreta (II modulo)

Secondo appello, a.a. 2004/2005 — compito 1

21 luglio 2005

Da svolgersi in tre ore. Al candidato si richiede di svolgere almeno un esercizio di ciascuno dei due gruppi e di rispondere ad almeno una delle domande teoriche. **Tutte le risposte devono essere motivate**.

Non è ammessa la consultazione di libri e/o appunti.

Esercizio 1 Dire se la congruenza $x^5 \equiv 2 \mod 23$ ammette soluzioni ed in tal caso determinarle tutte.

Esercizio 2 Sia A un insieme finito con n elementi.

1. Determinare n in modo tale che A abbia 4 sottinsiemi di cardinalità 3.
2. Mostrare che se n è pari, il numero dei sottinsiemi di A con 3 elementi è pari.
3. Dire se esistono numeri n dispari per cui A abbia un numero pari di sottinsiemi di cardinalità 3.
4. Determinare tutti i numeri n che verificano le condizioni del punto precedente.

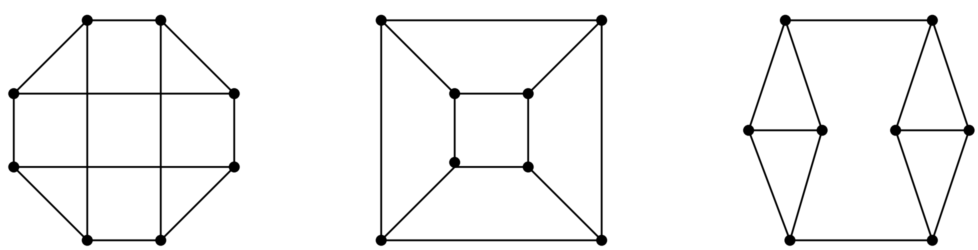
Esercizio 3 Dire, motivando la risposta, quale dei vettori

$$d_1 = (1, 1, 1, 3, 5, 5, 7, 7, 8, 8) \qquad d_2 = (3, 3, 3, 3, 4, 4, 6, 7, 7)$$

è lo score di un grafo e quando ciò è possibile costruire un tale grafo. Si dica inoltre se

1. è possibile trovare un tale grafo che sia anche un albero
2. è possibile trovare un tale grafo che sia sconnesso
3. è possibile trovare un tale grafo che sia 2-connesso

Esercizio 4 Dire, motivando la risposta, quali tra i grafi rappresentati in figura sono tra loro isomorfi e quali no.



Domanda di teoria 1. Si diano le definizioni di relazione d'equivalenza e di congruenza $\mod n$. Si provi che la congruenza $\mod n$ è una relazione d'equivalenza.

Domanda di teoria 2. Si dia la definizione di grafo, di grafo finito e di grado di un vertice. Si provi quindi che in ogni grafo finito la somma dei gradi dei vertici è uguale al doppio del numero dei lati.

Soluzione dell'esercizio 1 23 è primo, quindi 2 è invertibile $\mod 23$. Inoltre $\Phi(23) = 22$ e $(5, 22) = 1$, quindi la congruenza è risolubile. Un inverso di 5 $\mod 22$ è dato da 9 e quindi le soluzioni della congruenza sono date da $\left[2^9\right]_{23} = [6]_{23}$. ❑

Soluzione dell'esercizio 2 (1). $4 = \left|\binom{A}{3}\right| = \binom{|A|}{3} = \binom{n}{3} = n(n-1)(n-2)/6$ se e solo se $n(n-1)(n-2) = 24$. Dato che gli unici tre numeri consecutivi il cui prodotto fa 24 sno 2, 3 e 4, si ha che $n = 4$.
(2). Se n è pari, anche $n-2$ lo è, quindi $4 \mid n(n-1)(n-2)$. Dato che anche $3 \mid n(n-1)(n-2)$ e $(3, 4) = 1$ allora $12 \mid n(n-1)(n-2)$ e quindi $2 \mid n(n-1)(n-2)/6$.
(3) (4). Se n è dispari allora anche $n-2$ lo è, quindi $2 \mid n(n-1)(n-2)/6$ se e solo se $4 \mid n-1$. Infatti $2 \mid n(n-1)(n-2)/6$ se e solo se $4 \mid n(n-1)(n-2)$ e dato che $n(n-2)$ è dispari, questo si verifica se e solo se $4 \mid (n-1)$ ossia se e solo se $n \equiv 1 \mod 4$.

In particolare il numero 5 risponde alla domanda (3). ❑

Soluzione dell'esercizio 3 Se $G = (V, E)$ è un grafo tale che score$(G) = d_1$ allora $|V| = 10$ e ci sono due vertci di grado 8, chiamiamoli u e v. Ma allora i vertci che sono adiacenti sia a u che a v devono essere almeno 6 (in un insieme con 10 elementi due sottinsiemi dicardinalità 8 hanno intersezione di cardinalità almeno $8 + 8 - 10 = 6$) e quindi ci dovrebbero essere almeno 6 vertici diversi da u e v con grado almeno 2.. Ciò è in contraddizione con il fatto che di vertici di grado ≥ 2 e diversi da u e v ce ne dovrebbero essere soltanto 5.

Per d_2 usiamo il teorema dello score:

$$\begin{aligned}
d_2 &= (3,3,3,3,4,4,6,7,7)\\
d_2' &= (3,2,2,2,3,3,5,6)\\
d_2' &= (2,2,2,3,3,3,5,6)\\
d_2'' &= (2,1,1,2,2,2,4)\\
d_2'' &= (1,1,2,2,2,2,4)\\
d_2''' &= (1,1,1,1,1,1)
\end{aligned}$$

Dato che d_2''' è realizzabile come score di un grafo, anche d_1 lo è. La costruzione standard produce il grafo in figura 1 che è 2-connesso.

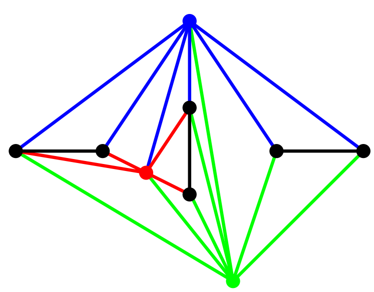


Figura 1: Il grafo costruito per la soluzione dell'esercizio 3. La configurazione di partenza è data dai vertici e lati neri a cui si aggiungono nell'ordine quelli rossi, blu e verdi.

(1). La risposta è no. Ogni albero finito ha vertici di grado 1, mentre in un tale grafo ogni vertice ha grado ≥ 2..

(2). La risposta è no. Se $G = (V, E)$ è un grafo tale che score$(G) = d_1$ allora esiste $v \in V$ tale che $\deg(V) = 8$, ossia ogni altro vertice, tranne uno, è adiacente e quindi congiungibile con v. D'altra parte l'unico vertice non ancora considerato ha grado positivo, e quindi deve essere congiungibile con almeno uno degli altri. Quindi G è connesso.

(3). Che il grafo di figura 1 sia 2-connesso lo si può vedere ad esempio mostrando che è ottenuto da un ciclo con successive aggiunzioni e suddivisioni di lati. ❑

Soluzione dell'esercizio 4 I primi due grafi sono tra loro isomorfi. In realtà sono isomorfi entrambi al grafo costituito dagli spigoli di un cubo, in cui i vertici sono terne (x, y, z) con $x, y, z \in \{0, 1\}$ ed in cui i lati sono le coppie di vertici che differiscono esattamente in una sola coordinata. Con una tale descrizione, non è difficile provare che in questo grafo non ci sono 3-cicli. Infatti due vertici (terne di zeri e uni) che e quindi differiscono tra loro in due coordinate e pertanto non sono adiacenti. In simboli se (x', y', z') e (x'', y'', z'') sono entrambi adiacenti a (x, y, z) allora, senza ledere la generalità, possiamo supporre che $y' = y$ e $z' = z$ e $x' \neq x$ e $x'' = x$ e $z'' = z$ e $y'' \neq y$. Ma allora $x' \neq x''$ e $y' \neq y''$, ossia (x', y', z') e (x'', y'', z'') non sono adiacenti.

Ma allora, dato che il terzo grafo contiene evidentemente dei 3-cicli, i primi due grafi non sono isomorfi al terzo.

Un altro modo per provare che nei primi due grafi non ci sono 3-cicli poteva essere quello di usare la matrice di adiacenza che ha una forma molto particolare e di cui non è difficile calcolare le potenze. ❑