Matematica Discreta (II modulo)

Terzo appello, a.a. 2004/2005 — compito 2

7 settembre 2005

Da svolgersi in tre ore. Al candidato si richiede di svolgere almeno un esercizio di ciascuno dei due gruppi e di rispondere ad almeno una delle domande teoriche. **Tutte le risposte devono essere motivate.**

Non è ammessa la consultazione di libri e/o appunti.

Esercizio 1 Determinare tutte le soluzioni della congruenza $x^7 \equiv 2 \mod 35$ e dire se il sistema di congruenze

$$\begin{cases} x^7 \equiv 2 & \mod 35 \\ x \equiv 16 & \mod 55 \end{cases}$$

ammette soluzioni oppure no.

Esercizio 2 Siano $A = \mathbb{Z}/_{15\mathbb{Z}}$ e $B = (\mathbb{Z}/_{15\mathbb{Z}})^*$. Si calcolino le cardinalità dei seguenti insiemi:

1. $\{C \in 2^A \mid |C \cap B| = 6\}$;
2. $\{f \in A^A \mid f(B) = B\}$;
3. $\{f \in A^A \mid f(B) = B \text{ e } f \text{ è iniettiva}\}$.

Esercizio 3 Dire, motivando la risposta, quale dei vettori

$$d_1 = (1,1,1,1,1,1,1,1,3,3,3,3,4) \qquad d_2 = (2,2,3,3,4,5,6,6,6,7,7)$$

è lo score di un grafo e quando ciò è possibile costruire un tale grafo. Si dica inoltre se è possibile trovare un tale grafo che sia anche

1. un albero;
2. sconnesso;
3. hamiltoniano.

Esercizio 4 Si provi che in ogni albero con 13 vertici dei quali 10 siano di grado 1 esiste un vertice di grado maggiore o uguale a 5.

Domanda di teoria 1. Dare la definizione di numero primo e provare che p è primo se e solo se

$$\forall\, a, b \in \mathbb{Z} \quad p \mid ab \implies p \mid a \text{ o } p \mid b.$$

Domanda di teoria 2. Si diano le definizioni di passeggiata, cammino e di grafo connesso. Si provi che in un grafo due vertici sono congiungibili con una passeggiata se e solo se sono congiungibili con un cammino.

Soluzioni proposte

Soluzione dell'esercizio 1 $(35, 2) = 1$ quindi 2 è invertibile $\mod 35$. Inoltre $\Phi(35) = 24$ e $(7, 24) = 1$, quindi la congruenza è risolubile. Un inverso di $7 \mod 24$ è dato da 7 e quindi le soluzioni della congruenza sono date da $\left[2^7\right]_{35} = [23]_{35}$.

Il sistema è quindi equivalente a

$$\begin{cases} x \equiv 23 & \mod 35 \\ x \equiv 16 & \mod 55 \end{cases}$$

che non ha soluzione dato che $(35, 55) = 5 \not| 7 = 23 - 16$. ❑

Soluzione dell'esercizio 2 Diamo solo i risultati, per la prova si veda la soluzione dell'analogo esercizio nell'altro compito di questo appello. $|A| = 15$ e $|B| = \Phi(15) = 8$.

(1). $|\mathcal{X}_1| = \left|\binom{B}{6} \times 2^{A \setminus B}\right| = \binom{8}{6} 2^7 = 28 \cdot 128 = 3584$.

(2). $|\mathcal{X}_2| = \left|S_B \times A^{A \setminus B}\right| = 8! \cdot 15^7$.

(3). $|\mathcal{X}_3| = \left|S_B \times S_{A \setminus B}\right| = 8! \cdot 7!$. ❑

Soluzione dell'esercizio 3 In d_2 ci sono un numero dispari di numeri dispari, quindi non può essere lo score di un grafo.

Per d_2 usiamo il teorema dello score:

$$\begin{array}{rcl} d_2 & = & (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 4) \\ d_2' & = & (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2) \\ d_2'' & = & (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1) \end{array}$$

Dato che d_2'' è realizzabile come score di un grafo, anche d_2 lo è. La costruzione standard produce il grafo in figura 1 che è sconnesso.

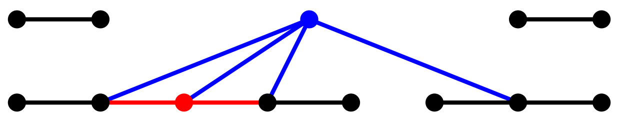

Figura 1: Il grafo costruito per la soluzione dell'esercizio 3. La configurazione di partenza è data dai vertici e lati neri a cui si aggiungono nell'ordine quelli rossi e quelli blu.

(1). La risposta è sì. Ad esemoio quello in figura 2.

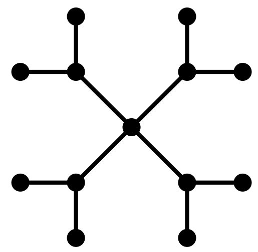

Figura 2: Un albero che realizza lo score d_1 dell'esercizio 3.

(2). La risposta è sì. Ad esempio quello in figura 1.

(3). La risposta è no. Un grafo hamiltoniano ha tutti i vertici di grado almeno 2. ❑

Soluzione dell'esercizio 4 Sia $T = (V, E)$ un tale albero e sia $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{13}\}$ con $\deg(v_i) = 1$ per $i = 1, 2 \ldots, 10$. Allora dato che T è un albero $|E| = |V| - 1 = 12$ e quindi

$$24 = 2|E| = \sum_{i=1}^{13} \deg(v_i) = 10 + \deg(v_{11}) + \deg(v_{12}) + \deg(v_{13}).$$

Se non ci fossero vertici di grado 5 allora si avrebbe che $\deg(v_j) \leq 4$ per ogni j e dalla relazione precedente si otterrebbe:

$$24 \leq 10 + 4 + 4 + 4 = 22$$

che è un assurdo. ❑