Matematica Discreta (II modulo)

Secondo appello, a.a. 2001/2002
compito 1

15 luglio 2002

Da svolgersi in tre ore. Al candidato si richiede di svolgere almeno un esercizio di ciascuno dei due gruppi e di rispondere ad almeno una delle domande teoriche.

Non è ammessa la consultazione di libri e/o appunti.

Esercizio 1 Determinare tutte le soluzioni intere della congruenza $x^{11} \equiv 35 \mod 38$. Si determini inoltre la minima soluzione positiva.

Esercizio 2 Sia $X = I_9 = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 9\}$ e sia $Y = \{n \in I_9 \mid n \text{ è dispari}\}$. Si calcolino le cardinalità dei seguenti insiemi:

1. $\mathcal{P}_1 = \{A \in 2^X \mid Y \subseteq A\}$;
2. $\mathcal{P}_2 = \{A \in 2^X \mid |Y \cap A| = 2\}$;
3. $\mathcal{P}_3 = \{A \in 2^X \mid Y \cap A \neq \varnothing\}$.

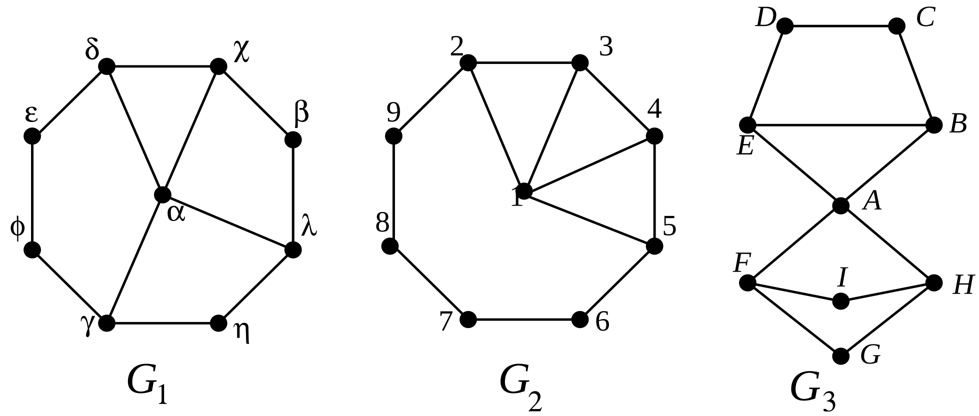
Esercizio 3 Dire, motivando la risposta, quale dei vettori

$$d_1 = (2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 11, 11) \qquad d_2 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4, 4, 6)$$

è lo score di un grafo e quando ciò è possibile costruire un tale grafo. Si dica inoltre se

1. è possibile trovare un tale grafo che sia anche un albero
2. è possibile trovare un tale grafo che sia sconnesso
3. è possibile trovare un tale grafo che sia 2-connesso

Esercizio 4 Dire, motivando la risposta, quali tra i grafi rappresentati in figura sono tra loro isomorfi e quali no.



Domanda di teoria 1. Dopo aver enunciato il principio di induzione nella seconda forma, si enunci e si provi il teorema di divisione euclidea tra numeri naturali.

Domanda di teoria 2. Enunciare e provare il teorema di caratterizzazione degli alberi finiti.

Soluzioni proposte

Soluzione dell'esercizio 1 $(35,38)=1$ ossia 35 è invertibile modulo 38. Inoltre $\Phi(38)=\Phi(2\cdot 19)=1\cdot 18=18$, e $(11,18)=1$ quindi la congruenza ha soluzione unica $\mod 38$. Determiniamo un inverso positivo di 11 modulo 18.

$$\begin{aligned} 18 &= 11+7 \\ 11 &= 7+4 \\ 7 &= 4+3 \\ 4 &= 3+1 \end{aligned}$$

da cui

$$1=4-3=4-(7-4)=2\cdot 4-7=2(11-7)-7=2\cdot 11-3\cdot 7=2\cdot 11-3(18-11)=5\cdot 11-3\cdot 18.$$

Quindi 5 è un inverso positivo di 11 modulo 18, pertanto la congruenza è equivalente a $x\equiv 35^5 \mod 38$ e quindi le soluzioni intere sono date da $\left[35^5\right]_{38}=\left[(-3)^5\right]_{38}=\left[(-3)^3\right]_{38}\left[(-3)^2\right]_{38}=[-27]_{38}[9]_{38}=[11]_{38}[9]_{38}=[99]_{38}=[23]_{23}$. Dato che $0\le 23<38$, 23 è la più piccola soluzione intera. ❑

Soluzione dell'esercizio 2 (1). L'insieme $\mathcal{P}_1$ è in bigezione con $2^{X\setminus Y}$, una bigezione essendo data da $\Phi_1:\mathcal{P}_1\to 2^{X\setminus Y}$ definita ponendo $\Phi_1(A)=A\setminus Y$. Ma allora

$$|\mathcal{P}_1|=\left|2^{X\setminus Y}\right|=2^{|X\setminus Y|}=2^{|X|-|Y|}=2^{9-4}=2^5=32.$$

(2). $\mathcal{P}_2$ è in bigezione con $\binom{Y}{2}\times(X\setminus Y)$, una bigezione è data da $\Phi_2:\mathcal{P}_2\to\binom{Y}{2}\times 2^{X\setminus Y}$ definita ponendo $\Phi_2(A)=\big(A\cap Y, A\cap(X\setminus Y)\big)$. Ma allora

$$|\mathcal{P}_2|=\left|\binom{Y}{2}\times 2^{X\setminus Y}\right|=\left|\binom{Y}{2}\right|\left|2^{X\setminus Y}\right|=\binom{|Y|}{2}32=\binom{4}{2}\cdot 32=6\cdot 32=192.$$

(3). $\mathcal{P}_3=2^X\setminus 2^{X\setminus Y}$, infatti $A\cap Y\neq\varnothing$ equivale a dire che $A\nsubseteq X\setminus Y$. Ma allora

$$|\mathcal{P}_3|=\left|2^X\setminus 2^{X\setminus Y}\right|=\left|2^X\right|-\left|2^{X\setminus Y}\right|=2^{|X|}-2^{|X\setminus Y|}=2^9-2^5=2^5(2^4-1)=32\cdot 15=480.$$

❑

Soluzione dell'esercizio 3 Un grafo G tale che score$(G)=d_1$ dovrebbe avere 5 vertici di grado dispiri, ma sappiamo che in ogni grafo il numero di vertici di grado dispari è pari, quindi un tale G non può esistere.

Per d_2 usiamo il teorema dello score:

$$\begin{aligned} d_2 &= (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,4,4,6) \\ d_2' &= (1,1,1,1,1,1,1,0,0,0,1,3,3) \\ d_2' &= (0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,3,3) \\ d_2'' &= (0,0,0,1,1,1,1,1,1,0,0,2) \end{aligned}$$

Dato che d_2'' è realizzabile come score di un grafo, anche d_1 lo è. La costruzione standard produce il grafo in figura 1.

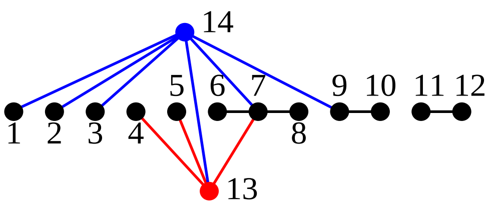


Figura 1: Il grafo costruito per la soluzione dell'esercizio 3. La configurazione di partenza è data dai vertici $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12$, e dai lati $\{6,7\},\{7,8\},\{9,10\},\{11,12\}$ che realizza d_2'' a cui sono successivamente aggiunti i vertici $13,14$ ottenendo dei grafi, che realizzano, nell'ordine, d_2' e d_2.

(1). La risposta è si. Con un po' di attenzione si può costruire il grafo di figura 2, che è un albero.

(2). La risposta è sì. Il grafo costruito in figura 1 è evidentemente sconnesso.

(3). Un tale grafo non potrà certamente essere 2-connesso dato che contiene necessariamente dei vertici di grado 1, e sappiamo che ciò è impossibile nei grafi 2-connessi. ❑

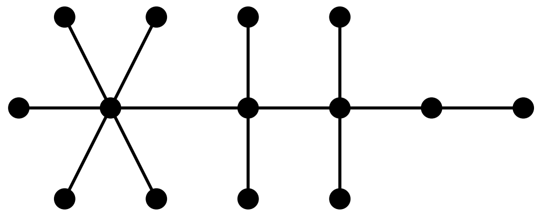


Figura 2: Un albero che realizza lo score d_2 dell'esercizio 3.

Soluzione dell'esercizio 4 G_3 non è 2-connesso, infatti se glio si toglie il vertice A si ottengono i due cicli disgiunti (B, C, D, E, B) e (F, G, H, F).

Il grafo G_2 è hamiltoniano (e quindi quindi è 2-connesso) in quanto c'è il ciclo $(1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 2, 1)$ che contiene tutti i vertici.

Anche il grafo G_1 è hamiltoniano (e quindi quindi è 2-connesso) in quanto c'è il ciclo $(\alpha, \delta, \epsilon, \varphi, \gamma, \eta, \lambda, \beta, \chi, \alpha)$.

Di conseguenza il primo ed il secondo grafo non sono isomorfi$G_1 \ncong G_3$ e $G_2 \ncong G_3$.

Neanche G_1 e G_2 sono isomorfi, infatti in G_1 c'è un vertice β che ha grado 2 ed i vertici a lui adiacenti χ e λ hanno entrambi grado 3. Se ci fosse un isomorfismo $f : G_1 \to G_2$ dovrebbe esserci un vertice $f(\beta)$ in G_2 con le stesse proprietà, ma i quattro vertici di G_2 che hanno grado 2 sono adiacenti ciascuno ad al più un vertice di grado 3, più esplicitamente:

- 9 è adiacente a 2 e 8 che hanno grado rispettivamente 3 e 2
- 8 è adiacente a 9 e 7 che hanno grado antrambi grado 2
- 7 è adiacente a 8 e 6 che hanno grado antrambi grado 2
- 6 è adiacente a 7 e 5 che hanno grado rispettivamente 2 e 3

❑