Matematica Discreta (II modulo)

Secondo appello, a.a. 2001/2002
compito 1

29 giugno 2003

Da svolgersi in tre ore. Al candidato si richiede di svolgere almeno un esercizio di ciascuno dei due gruppi e di rispondere ad almeno una delle domande teoriche. **Tutte le risposte devono essere motivate**.

Non è ammessa la consultazione di libri e/o appunti.

Esercizio 1 Dire, motivando la risposta, se il seguente sistema di congruenze ammette soluzioni ed in tal caso determinarle tutte:

$$\begin{cases} x \equiv 20 \mod 117 \\ x \equiv 11 \mod 81 \end{cases}$$

Esercizio 2 Siano $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 18 \text{ e } (x, 18) = 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 15\}$.

1. Calcolare la cardinalità degli insiemi $\mathcal{F}_1 = \{f \in B^A \mid f \text{ è iniettiva}\}$ e $\mathcal{F}_2 = \{f \in A^B \mid f \text{ è iniettiva}\}$;
2. Sia $C = \{5, 7\}$. Determinare la cardinalità dell'insieme $\mathcal{F}_3 = \{f \in A^A \mid f \text{ è una permutazione e } f(C) = C\}$.
3. Determinare la cardinalità dell'insieme $\mathcal{F}_4 = \{\{1, 2\}^A \mid f \text{ è suriettiva}\}$.

Esercizio 3 Sia T un albero che abbia soltanto vertici di grado 1, 2 e 3 e con esattamente 5 vertici di grado 3.

1. Si provi che T ha esattamente 7 foglie (vertici di grado 1).
2. Si disegnino due di questi alberi che non siano isomorfi.
3. Si dica, motivando la risposta se l'insieme di tali alberi a meno di isomorfismo è finito, ed in tal caso determinarne la cardinalità.

Esercizio 4 Siano G_1 e G_2 i grafi definiti $V(G_1) = V(G_2) = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ e

$$\begin{aligned} E(G_1) &= \{\{i, j\} \mid i - j = \pm 5\} \\ E(G_2) &= \{\{i, j\} \mid i - j = \pm 8\}. \end{aligned}$$

1. Dire, motivando la risposta se i due grafi sono isomorfi oppure no.
2. Determinare $k \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ in modo che il grafo G_3 definito da $V(G_3) = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ e

$$E(G_3) = \{\{i, j\} \mid i - j = \pm k\}$$

abbia esattamente 2 componenti connesse.

Domanda di teoria 1. Dopo aver enunciato il principio di induzione nella seconda forma, si enunci e si provi il teorema di rappresentazione dei numeri naturali rispetto ad una base fissata.

Domanda di teoria 2. Dopo aver definito l'albero di copertura di un grafo, si enunci e si provi il teorema di esistenza dell'albero di copertura per i grafi finiti.

Soluzioni proposte

Soluzione dell'esercizio 1 $(117, 81) = 9 \mid -9 = 11 - 20$ quindi il sistema e' risolubile. Inoltre $9 = (-2) \cdot 117 + (3) \cdot 81$ quindi $11 - 20 = -9 \cdot -1 = (9) \cdot 2 + (117) \cdot -3$ quindi $x_0 = 81$ è una soluzione del sistema. Tutte le soluzioni sono allora date da $\{254 + k[254, 117] \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{81 + k254 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. ❏

Soluzione dell'esercizio 2 (1). $|A| = \Phi(18) = 6$, $|B| = 15$. Ma allora $\mathcal{F}_2 = \varnothing$ e quindi $|\mathcal{F}_2| = 0$. Invece $|\mathcal{F}_1| = \frac{15!}{(15-6)!} = \frac{15!}{9!} = 3603600$.
(2). Indichiamo con S_C l'insieme delle permutazioni di C e con $S_{A \setminus C}$ l'insieme delle permutazioni di $A \setminus C$. Allora la funzione

$$\begin{aligned} \Psi &: S_{A\setminus C} \times S_C \to \mathcal{F}_3 \\ \Psi &: (f, \sigma) \mapsto f \cup \sigma \end{aligned}$$

è una bigezione, la cui inversa è data da:

$$\begin{aligned} \Psi^{-1} &: \mathcal{F}_3 \to S_{A\setminus C} \times S_C \\ \Psi^{-1} &: f \mapsto (f\big|_{A\setminus C}, f\big|_C) \end{aligned}$$

Ma allora $|\mathcal{F}_3| = \left|S_{A\setminus C} \times S_C\right| = \left|S_{A\setminus C}\right| \cdot |S_C| = |A \setminus C|! \cdot |C|! = 4! \cdot 2! = 48$
(3). Affinché una funzione $A \to \{1, 2\}$ non sia suriettiva è necessario e sufficiente che sia non costante. D'altra parte le funzioni $A \to \{0, 1\}$ non costanti sono esattamente 2 e quindi $|\mathcal{F}_4| = 2^{|A|} - 2 = 2^6 - 2 = 62$.
❏

Soluzione dell'esercizio 3 (1). Sia n il numero di vertici di grado 1 e k il numero di vertici di grado 2. Dato che ci sono soltanto vertici di grado 1, 2 e 3, e quelli di grado 3 sono 5, si ha che $|V(T)| = n + k + 5$. Ma allora, dato che T è un albero

$$|E(T)| = |V(T)| - 1 = n + k + 4.$$

D'altra parte

$$2\,|E(T)| = \sum_{v \in V(T)} \deg(v) = n + 2k + 3 \cdot 5 = n + 2k + 15$$

Dalle due relazioni si ottiene allora

$$2n + 2k + 8 = n + 2k + 15$$

da cui $n = 7$.
(2). I due alberi in figura 1 hanno la proprietà richiesta (esattamente 5 vertici di grado 3) ma non sono isomorfi, dato che hanno un numero diverso di vertici

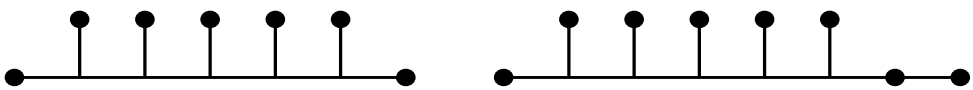

Figura 1: Duae alberi non isomorfi e con le proprietà richieste nell'esercizio 3

(3). Se T è un albero con la proprietà suddetta, e v è una sua foglia, allora se $w \notin V(T)$ si consideri l'albero $T' = (V(T) \cup \{w\}, E(T) \cup \{\{v, w\}\})$. Chiaramente T ha ancora la stessa proprietà, ma ha un vertice in più. Con questa tecnica si possono allora costruire una infinità di alberi a dua a due non isomorfi, in quanto aventi un diverso numero di vertici, ma tutti con esattamente 5 vertici di grado 3.
❏

Soluzione dell'esercizio 4 (1). Si verifica immediatamente che

$$E(G_1) = \{\{0,5\},\{5,10\},\{10,3\},\{3,8\},\{8,1\},\{1,6\},\{6,11\},\{11,4\},\{4,9\},\{9,2\},\{2,7\},\{7,0\}\}$$

e quindi $G_1 \cong C_{12}$.
Allo stesso modo

$$E(G_2) = \{\{0,8\},\{8,4\},\{4,0\},\{1,9\},\{9,5\},\{5,1\},\{2,10\},\{10,6\},\{6,2\},\{3,11\},\{11,7\},\{7,3\}\}$$

e quindi G_2 è isomorfo all'unione di 4 copie disgiunte di C_3, in particolare quindi non è connesso.

Pertanto i due grafi essendo uno connesso e ed uno sconnesso non sono isonmrfi.

(2). Prendendo $k = 2$ si ha che

$$E(G_3) = \{\{0,2\},\{2,4\},\{4,6\},\{6,8\},\{8,10\},\{10,0\},\{1,3\},\{3,5\},\{5,7\},\{7,9\},\{9,11\},\{11,1\}\}$$

e quindi G_3, essendo isomorfo all'unione disgiunta di due copie di C_6, ha esattamente due componenti connesse. ❑