Matematica Discreta (II modulo)

Secondo appello, a.a. 2001/2002
compito 2

29 giugno 2003

Da svolgersi in tre ore. Al candidato si richiede di svolgere almeno un esercizio di ciascuno dei due gruppi e di rispondere ad almeno una delle domande teoriche. **Tutte le risposte devono essere motivate**.

Non è ammessa la consultazione di libri e/o appunti.

Esercizio 1 Dire, motivando la risposta, se il seguente sistema di congruenze ammette soluzioni ed in tal caso determinarle tutte.

$$\begin{cases} x \equiv 26 \mod 198 \\ x \equiv 35 \mod 27 \end{cases}$$

Esercizio 2 Siano $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 21 \text{ e } (x, 21) = 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 10\}$.

1. Calcolare la cardinalità degli insiemi $\mathcal{F}_1 = \{f \in B^A \mid f \text{ è iniettiva}\}$ e $\mathcal{F}_2 = \{f \in A^B \mid f \text{ è iniettiva}\}$;
2. Sia $C = \{2, 5\}$. Determinare la cardinalità dell'insieme $\mathcal{F}_3 = \{f \in A^A \mid f \text{ è una permutazione e } f(C) = C\}$.
3. Determinare la cardinalità dell'insieme $\mathcal{F}_4 = \{\{1, 2\}^B \mid f \text{ è suriettiva}\}$.

Esercizio 3 Sia T un albero che abbia soltanto vertici di grado 1, 2 e 4 e con esattamente 3 vertici di grado 4.

1. Si provi che T ha esattamente 8 foglie (vertici di grado 1).
2. Si disegnino due di questi alberi che non siano isomorfi.
3. Si dica, motivando la risposta se l'insieme di tali alberi a meno di isomorfismo è finito, ed in tal caso determinarne la cardinalità.

Esercizio 4 Siano G_1 e G_2 i grafi definiti $V(G_1) = V(G_2) = \mathbb{Z}/_{18\mathbb{Z}}$ e

$$\begin{aligned} E(G_1) &= \{\{i, j\} \mid i - j = \pm 7\} \\ E(G_2) &= \{\{i, j\} \mid i - j = \pm 8\}. \end{aligned}$$

1. Dire, motivando la risposta se i due grafi sono isomorfi oppure no.
2. Determinare $k \in \mathbb{Z}/_{18\mathbb{Z}}$ in modo che il grafo G_3 definito da $V(G_3) = \mathbb{Z}/_{18\mathbb{Z}}$ e

$$E(G_3) = \{\{i, j\} \mid i - j = \pm k\}$$

abbia esattamente 3 componenti connesse.

Domanda di teoria 1. Dopo aver enunciato il principio di induzione nella seconda forma, si enunci e si provi il teorema di rappresentazione dei numeri naturali rispetto ad una base fissata.

Domanda di teoria 2. Dopo aver definito l'albero di copertura di un grafo, si enunci e si provi il teorema di esistenza dell'albero di copertura per i grafi finiti.

Soluzioni proposte

Soluzione dell'esercizio 1 $(198, 27) = 9 \mid 9 = 35 - 26$ quindi il sistema e' risolubile. Inoltre $9 = (1)\cdot 198 + (-7)\cdot 27$ quindi $35 - 26 = 9\cdot 1 = (9)\cdot 1 + (198)\cdot -7$ quindi $x_0 = 27$ è una soluzione del sistema. Tutte le soluzioni sono allora date da $\{224 + k[224, 198] \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{27 + k224 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ❑

Soluzione dell'esercizio 2 (1). $|A| = \Phi(21) = 14$, $|B| = 10$. Ma allora $\mathcal{F}_1 = \varnothing$ e quindi $|\mathcal{F}_1| = 0$. Invece $|\mathcal{F}_2| = \frac{21!}{(21-10)!} = \frac{21!}{11!} = 1279935820800$.
(2). Indichiamo con S_C l'insieme delle permutazioni di C e con $S_{A\setminus C}$ l'insieme delle permutazioni di $A \setminus C$. Allora la funzione

$$\begin{aligned} \Psi &: S_{A\setminus C} \times S_C \to \mathcal{F}_3 \\ \Psi &: (f, \sigma) \mapsto f \cup \sigma \end{aligned}$$

è una bigezione, la cui inversa è data da:

$$\begin{aligned} \Psi^{-1} &: \mathcal{F}_3 \to S_{A\setminus C} \times S_C \\ \Psi^{-1} &: f \mapsto (f|_{A\setminus C}, f|_C) \end{aligned}$$

Ma allora $|\mathcal{F}_3| = \left|S_{A\setminus C} \times S_C\right| = \left|S_{A\setminus C}\right| \cdot |S_C| = |A \setminus C|! \cdot |C|! = 12! \cdot 2! = 958003200$
(3). Affinché una funzione $B \to \{1, 2\}$ non sia suriettiva è necessario e sufficiente che sia non costante. D'altra parte le funzioni $A \to \{0, 1\}$ non costanti sono esattamente 2 e quindi $|\mathcal{F}_4| = 2^{|B|} - 2 = 2^{10} - 2 = 1022$. ❑

Soluzione dell'esercizio 3 (1). Sia n il numero di vertici di grado 1 e k il numero di vertici di grado 2. Dato che ci sono soltanto vertici di grado 1, 2 e 4, e quelli di grado 4 sono 3, si ha che $|V(T)| = n + k + 3$. Ma allora, dato che T è un albero

$$|E(T)| = |V(T)| - 1 = n + k + 2.$$

D'altra parte

$$2\,|E(T)| = \sum_{v\in V(T)} \deg(v) = n + 2k + 4\cdot 3 = n + 2k + 12$$

Dalle due relazioni si ottiene allora

$$2n + 2k + 4 = n + 2k + 12$$

da cui $n = 8$.
(2). I due alberi in figura 1 hanno la proprietà richiesta (esattamente 3 vertici di grado 4) ma non sono isomorfi, dato che hanno un numero diverso di vertici

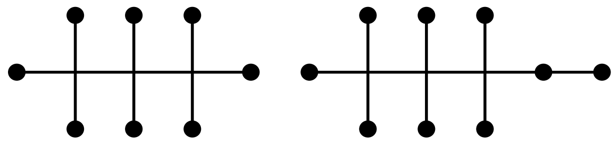

Figura 1: Duae alberi non isomorfi e con le proprietà richieste nell'esercizio 3

(3). Se T è un albero con la proprietà suddetta, e v è una sua foglia, allora se $w \notin V(T)$ si consideri l'albero $T' = (V(T) \cup \{w\}, E(T) \cup \{\{v, w\}\})$. Chiaramente T ha ancora la stessa proprietà, ma ha un vertice in più. Con questa tecnica si possono allora costruire una infinità di alberi a dua a due non isomorfi, in quanto aventi un diverso numero di vertici, ma tutti con esattamente 3 vertici di grado 4. ❑

Soluzione dell'esercizio 4 (1). Si verifica immediatamente che

$$\begin{aligned} E(G_1) = \{&\{0,7\},\{7,14\},\{14,3\},\{3,10\},\{10,17\},\{17,6\},\{6,13\},\{13,2\},\{2,9\},\\ &\{9,16\},\{16,5\},\{5,12\},\{12,1\},\{1,8\},\{8,15\},\{15,4\},\{4,11\},\{11,0\}\} \end{aligned}$$

e quindi $G_1 \cong C_{18}$.

Allo stesso modo

$$
\begin{aligned}
E(G_2) &= \{\{0,8\},\{8,16\},\{16,6\},\{6,14\},\{14,4\},\{4,12\},\{12,2\},\{2,10\},\{10,0\}\}\cup \\
&\quad \{\{1,9\},\{9,17\},\{17,7\},\{7,15\},\{15,5\},\{5,13\},\{13,3\},\{3,11\},\{11,1\}\}
\end{aligned}
$$

e quindi G_2 è isomorfo all'unione di 2 copie disgiunte di C_9, in particolare quindi non è connesso.

Pertanto i due grafi essendo uno connesso e ed uno sconnesso non sono isonmrfi.

(2). Prendendo $k = 3$ si ha che

$$
\begin{aligned}
E(G_3) &= \{\{0,3\},\{3,6\},\{6,9\},\{9,12\},\{12,15\},\{15,0\}\}\cup \\
&\quad \{\{1,4\},\{4,7\},\{7,10\},\{10,13\},\{13,16\},\{16,1\}\}\cup \\
&\quad \{\{2,5\},\{5,8\},\{8,11\},\{11,14\},\{14,17\},\{17,2\}\}\}
\end{aligned}
$$

e quindi G_3, essendo isomorfo all'unione disgiunta di tre copie di C_6, ha esattamente due componenti connesse. ❏