A mia madre

Dottorato di Ricerca in Matematica, 3° Ciclo, a.a. 1987/88 – 1990/91
Sede amministrativa: Università degli Studi di Pisa
Coordinatore: Chiar.mo Prof. Sergio Campanato

Dottorato di Ricerca in Matematica 3º ciclo

Domenico Luminati

Immersioni di Superficie
e
Contorni Apparenti

Università degli Studi di Pisa

Indice

Introduzione

Siano S ed $\mathbf{N}$ due superficie compatte, connesse, lisce (ossia di classe C^∞). Consideriamo il sottoinsieme $\mathcal{F}$, dell'insieme delle applicazioni differenziabili tra S ed $\mathbf{N}$, definito dalla seguente proprietà locale:

(W1) Per ogni punto $p \in S$ esistono germi di diffeomorfismo, $\varphi : (S, p) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ e $\psi : (\mathbf{N}, F(p)) \to (\mathbb{R}^2, 0)$, tali che la composizione $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ sia uguale ad uno dei seguenti tre germi:

$$i)\ (x, y) \mapsto (x, y), \qquad ii)\ (x, y) \mapsto (x, y^2), \qquad iii)\ (x, y) \mapsto (x, y^3 - xy).$$

La condizione locale appena enunciata, garantisce che per ogni $F \in \mathcal{F}$, l'insieme Σ_F dei punti singolari di F è una sottovarietà di dimensione 1 di S, ossia una unione disgiunta di circonferenze. Denotiamo con $\mathcal{W}$ il sottoinsieme di $\mathcal{F}$ definito dalla seguente proprietà globale:

(W2) il *contorno apparente* di F, ossia l'insieme $\Gamma_F = F(\Sigma_F)$, è una curva con solo cuspidi e nodi ovvero è una curva liscia in $\mathbf{N}$, fatta eccezione per un numero finito di cuspidi ordinarie ed un numero finito di incroci normali.

Ricordiamo che una applicazione $F \in C^\infty(S, \mathbf{N})$ si dice stabile se esiste un intorno $\mathcal{U}$ di F in $C^\infty(S, \mathbf{N})$, rispetto alla topologia di Whitney, tale che per ogni $G \in \mathcal{U}$ esistono diffeomorfismi $\Phi : S \to S$ e $\Psi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ tali che $\Psi \circ F \circ \Phi = G$. (Per una definizione della topologia di Whitney si veda ad esempio [**Hi**]).

È un classico risultato nello studio delle applicazioni tra superficie, il seguente Teorema dovuto a Whitney [**W**]:

Teorema. *L'insieme $\mathcal{W}$ è aperto e denso nell'insieme delle applicazioni $C^\infty(S, \mathbf{N})$. In più $\mathcal{W}$ è l'insieme delle applicazioni stabili tra S ed $\mathbf{N}$.*

L'insieme $\mathcal{W}$ è detto l'insieme delle applicazioni generiche tra S ed $\mathbf{N}$. La motivazione del termine *"generico"* sta nel teorema appena enunciato, il quale garantisce che ogni applicazione differenziabile può essere approssimata con applicazioni in $\mathcal{W}$, e che ogni applicazione di $\mathcal{W}$ è, in un certo senso, "invariante" per piccole perturbazioni.

Per definizione di $\mathcal{W}$, il contorno apparente di una applicazione generica è una curva di tipo molto particolare e non troppo complicato, come si è già detto è una curva con solo cuspidi e nodi. Nasce naturalmente una domanda:

> *Può una qualunque curva con cuspidi e nodi essere il contorno apparente di una qualche applicazione generica?*

Non è difficile trovare esempi che danno una risposta negativa a questa domanda. Infatti si trova facilmente (cfr. §2.2) una prima condizione necessaria perchè la curva sia un contorno apparente, e precisamente vale il seguente fatto:

(C1) *Ogni contorno apparente ha un lato coerente.*

Dove con l'espressione "avere un lato coerente" intendiamo che esiste un campo di vettori lungo la curva, trasversale alla curva stessa, ovviamente eccetto nei punti di cuspide, e che all'intorno di ogni cuspide verifichi la "condizione di compatibilità" di essere diretto verso l'interno della cuspide su entrambi i rami della cuspide stessa (vedi Fig. I).

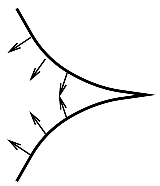


Fig. I

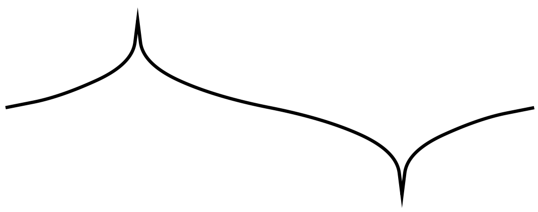


Fig. II

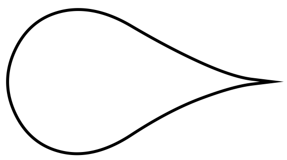


Fig. III

Evidentemente una curva come quella in Fig. II non può avere un siffatto campo, e quindi non può essere il contorno apparente di una applicazione generica. Osserviamo incidentalmente che la condizione appena enunciata, non è sufficiente a garantire che la curva sia un contorno apparente. Si consideri ad esempio la curva in $\mathbb{R}^2$ data in Fig. III; evidentemente una tale curva verifica la condizione (C1) ma è facile convincersi che non è contorno apparente di nessuna applicazione generica. Nasce quindi il seguente problema:

(P1) *Data una curva con cuspidi e nodi $\Gamma \subset \mathbf{N}$, decidere se Γ è un contorno apparente oppure no.*

Nel seguito con il termine curva con cuspidi e nodi, intenderemo tanto l'insieme Γ quanto una sua parametrizzazione, $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$, "quasi–regolare", ossia con derivata prima sempre diversa da zero salvo in un numero finito di punti in cui, in un opportuno sistema di coordinate, la f è data da $t \mapsto (t^2, t^3)$, definita su una unione disgiunta di circonferenze. Con questa accezione il problema (P1) è evidentemente riformulabile nel modo seguente:

(P1$'$) *Data una curva con cuspidi e nodi $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ dire se esistono una superficie $S \supset \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1$ ed una applicazione generica $F : S \to \mathbf{N}$ tale che $\Sigma_F = \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1$ ed $F\big|_{\coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1} = f$.*

Un primo risultato in questa direzione, è stato dato da G. K. Francis e S. F. Troyer (cfr. [**F–T1**], [**F–T2**]) i quali forniscono un metodo di risoluzione di natura puramente combinatoria di questo problema, per curve contenute nel piano $\mathbb{R}^2$ o nella sfera $\mathbf{S}^2$.

Nel secondo capitolo di questa tesi, affronteremo in maniera sistematica il problema nella sua generalità, dandone dapprima una soluzione nel caso piano ed affrontando quindi il caso generale, ossia il caso di una curva con cuspidi e nodi contenuta in una arbitraria superficie compatta $\mathbf{N}$.

Anche il nostro metodo è di natura puramente combinatoria ed è basato, come quello di Francis e Troyer, su una semplice osservazione, che è una ovvia conseguenza della definizione di applicazione generica:
Se $F : S \to \mathbf{N}$ è una applicazione generica ed U è un intorno tubolare del luogo critico di F, allora $F|_{S-U}$ è una immersione. In più se l'intorno tubolare è scelto in maniera opportuna, $F|_{\partial U}$ è una curva con solo nodi.

Quindi, come suggerito anche da Haefliger [**H**], il problema di vedere se una data curva con cuspidi e nodi è un contorno apparente oppure no, si divide in due sottoproblemi:

(P1.1) *trovare, se esiste, una estensione locale della curva con cuspidi e nodi f ad una applicazione generica $F_1 : M \to \mathbf{N}$, dove M è una unione disgiunta di cilindri e nastri di Möbius;*

(P1.2) *in caso affermativo, decidere se $F_1|_{\partial M}$, che è una curva con solo nodi, è estendibile ad una immersione di una qualche superficie compatta con bordo $\widetilde{S}$ in $\mathbf{N}$.*

Si vedrà in §2.2, che la condizione (C1) è sufficiente a garantire l'esistenza di estensioni locali ad una qualsiasi unione disgiunta di cilindri e nastri di Möbius, e ciò risolve il problema (P1.1). Per quanto riguarda invece il problema (P1.2) ci baseremo sostanzialmente sul lavoro di Blank [**Bl**], [**Po**] e sulle sue generalizzazioni dovute a vari autori (cfr. [**M**], [**E–M**], [**Ez**], [**F1**], [**F2**], [**C**] etc.) che risolve l'analogo del problema (P1$'$) per le immesioni, ovvero il seguente problema:

data una curva $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ con solo nodi, trovare se esistono una superficie compatta S con k componenti di bordo ed una immersione $F : S \to \mathbf{N}$ tale che $F|_{\partial S} = f$.

Il modo di risolvere tale problema si basa sulla definizione di un oggetto puramente combinatorio, la *parola di Blank*, associato ad una curva con solo nodi f, dalla quale con operazioni algoritmiche si definisce un insieme di oggetti, gli *assemblaggi*, che, modulo una opportuna relazione d'equivalenza, è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle immersioni che estendono f modulo la relazione di equivalenza destra (cfr. Teorema 1.9.14). Ricordiamo che due applicazioni differenziabili $F : S \to \mathbf{N}$ ed $F_1 : S_1 \to \mathbf{N}$ si dicono equivalenti a destra se esiste un diffeomorfismo $\Phi : S_1 \to S$ tale che $F_1 = F \circ \Phi$.

Nel primo capitolo, premettiamo una trattazione completa di questo argomento, sia allo scopo di raccogliere il materiale sparso in letteratura in una trattazione unitaria, sia perchè gli enunciati che saranno usati nel seguito, sono leggermente più generali di quelli che si trovano nei lavori originali (sebbene vi siano sostanzialmente contenuti). Il metodo di dimostrazione che useremo non si rifà tanto al metodo originale di

Blank [**Bl**], [**Po**], quanto piuttosto al metodo usato da Marx [**M**], che, sebbene meno elegante, a nostro parere, sembra più vicino all'intuizione geometrica del problema.

Nel secondo capitolo, per risovere il problema (P1$'$) definiremo una generalizzazione della parola di Blank per una curva con cuspidi e nodi f (cfr. §2.4), dalla quale, sempre con costruzioni puramente algoritmiche, si determina un insieme di oggetti, che chiameremo ancora assemblaggi minimali. Si dimostrerà, che, anche in questo caso, tale insieme, modulo una opportuna relazione d'equivalenza, è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle estensioni generiche della curva f, modulo equivalenza destra (cfr. Teorema 2.5.14).

Supponiamo ora di avere dati un contorno apparente $\Gamma \subset \mathbf{N}$, ed un fibrato in rette $\pi : \mathbf{E} \to \mathbf{N}$. Un altro problema che nasce naturalmente è il seguente:

(P2) *Esiste una superficie $\widetilde{S}$ immersa [risp. "embedded"] in $\mathbf{E}$, in posizione generica rispetto alla proiezione π, di cui Γ sia il contorno apparente?*

dove con l'espressione "$\widetilde{S}$ è in posizione generica rispetto a π" intendiamo che la restrizione $\pi_{|\widetilde{S}} : \widetilde{S} \to \mathbf{N}$ è una applicazione generica e la richiesta per Γ di essere il contorno apparente di $\widetilde{S}$ va intesa nel senso di essere il contorno apparente di $\pi_{|\widetilde{S}}$. Evidentemente questo problema è equivalente al seguente:

Data una applicazione generica $F : S \to \mathbf{N}$, è possibile fattorizzare l'applicazione F mediante una immersione [risp. un "embedding"] $\widetilde{F}$ in $\mathbf{E}$ seguita dalla proiezione π del fibrato? (Si vuole che il seguente diagramma sia commutativo).

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\widetilde{F}} & \mathbf{E} \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ S & \xrightarrow[F]{} & \mathbf{N} \end{array}$$

La parte di questo problema riguardante la fattorizzazione mediante una immersione, è stata risolta prima da Haefliger [**H**], nel caso $\mathbf{N} = \mathbb{R}^2$ ed $\mathbf{E} = \mathbb{R}^3$, che ottenne una condizione necessaria e sufficiente basata sul numero di cuspidi presenti in ogni componente del contorno apparente e sulla orientabilità del fibrato normale della componente connessa di Σ_F corrispondente; più precisamente detta C una componente connessa di Σ_F, se denotiamo con $c(C)$ il numero di punti di cuspide in C e poniamo $\varepsilon(C) = \pm 1$ secondo che il fibrato normale a C in S sia banale o no, risulta che condizione necessaria e sufficiente affinchè $F : S \to \mathbb{R}^2$ sia fattorizzabile con una immersione in $\mathbb{R}^3$ è che:

per ogni componente connessa C di Σ_F $\quad (-1)^{c(C)} = \varepsilon(C)$.

Successivamente è stato dimostrato (cfr. [**E**], [**Mi**]) che tale condizione è necessaria e sufficiente anche nel caso in cui $\mathbf{N}$ sia una superficie arbitraria ed $\mathbf{E} = \mathbf{N} \times \mathbb{R}$ sia il fibrato banale. Nel caso generale si trova invece una condizione che fa intervenire l'orientabilità o meno anche del fibrato $(F|_C)^*\mathbf{E}$ indotto da $\mathbf{E}$ su C, e precisamente, detto $\varepsilon(\mathbf{E}_C) = \pm 1$ secondo che il suddetto fibrato sia orientabile oppure no, si trova la seguente condizione necessaria e sufficiente (cfr. Teorema 3.1.1 ed Osservazione 3.1.2):

per ogni componente connessa C di Σ_F $\quad (-1)^{c(C)} = \varepsilon(C)\varepsilon(\mathbf{E}_C)$;

condizione questa, che evidentemente si riduce alla condizione di Haefliger, nel caso in cui $\mathbf{E}$ sia il fibrato banale.

Per quanto riguarda infine la fattorizzabilità mediante embedding, la situazione è leggermente più complicata e si vedrà in §3.5 che la condizione di fattorizzabilità è "nascosta" nella parola della curva con cuspidi $F|_{\Sigma_F}$, come in un certo senso ci si aspetta, dato che evidentemente la fattorizzabilità si mantiene per equivalenza destra, e gli assemblaggi della parola di $F|_{\Sigma_F}$ descrivono tutte le estensioni di $F|_{\Sigma_F}$ a meno di equivalenza destra.

In particolare allora, nell'assemblaggio minimale associato ad F si troverà anche l'informazione che permetterà di decidere se F è o meno fattorizzabile; più precisamente si vedrà che l'assemblaggio minimale associato ad F descrive una cellularizzazione della superficie S, tale che la restrizione di F alla parte interna di ciascuna 2–cella è un diffeomorfismo con l'immagine, da questo fatto e da alcune altre proprietà di tale cellularizzazione (cfr. Proposizione 3.5.6 e 3.5.10) se ne dedurrà che una condizione necessaria e sufficiente affinchè F sia fattorizzabile con un embedding è data dall'esistenza di una struttura di grafo orientato senza loop (e quindi di un ordinamento) sull'insieme delle 2–celle di tale cellularizzazione, che verifichi opportune condizioni di compatibilità (cfr. Teorema 3.5.12).

In tutta la tesi, le superficie, le applicazioni, le curve ecc. saranno supposte, anche se non sarà esplicitamente detto, lisce, ossia differenziabili di classe C^∞. Inoltre, spesso useremo tecniche di "taglia e cuci" che funzionano bene lavorando in categoria C^0 o in categoria PL, ma visto che nel caso delle superficie tali categorie coincidono con la categoria C^∞, non sempre ci preoccuperemo (ma qualche volta lo faremo) di dare tutti i dettagli tecnici per operare tali costruzioni nell'ambito differenziabile.

Un ultimo cenno sulle notazioni che useremo, che sono quelle standard, ma che richiamiamo ugualmente per maggior chiarezza. Denoteremo con $\mathbb{R}$ la retta reale, e quindi con $\mathbb{R}^n$ lo spazio euclideo di dimensione n; denoteremo rispettivamente con $\mathbf{S}^{n-1}$ e $\mathbf{D}^n$ la sfera ed il disco unitari in $\mathbb{R}^n$; con il simbolo $\amalg$ denoteremo l'unione disgiunta. Infine la conclusione di una dimostrazione sarà indicata con il simbolo: $\square$

Desidero ringraziare il Prof. Riccardo Benedetti, del Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Pisa, per avermi seguito e stimolato durante lo svolgimento del lavoro che ha portato alla stesura di questa tesi.

Capitolo 1: Immersioni di superficie

In questo primo capitolo, ci proponiamo di raccogliere vari risultati, più o meno già noti in letteratura, sul problema dell'estensione di una curva generica in una superficie $\mathbf{N}$, ad una immersione da una superficie compatta con bordo $\mathbf{S}$ in $\mathbf{N}$.

Nell'esposizione ci rifaremo non tanto al metodo originale di Blank [**Bl**], [**Po**], quanto ad alcuni suoi raffinamenti dovuti principalmente a Marx ed Ezell [**M**], [**Ez**], [**E–M**].

Ci occuperemo inizialmente del caso $\mathbf{N} = \mathbb{R}^2$ e passeremo quindi ad esaminare il caso generale.

1.1. Parola di una curva generica piana

Definizione 1.1.1. *Sia k un intero positivo, per k–curva generica intenderemo una applicazione:*

$$f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbf{N}$$

regolare (ovvero con derivata sempre non nulla) e con soltanto incroci normali.

Denoteremo con Γ l'immagine di f e con Γ_h l'immagine tramite f dell'h–esima circonferenza. Supporremo inoltre di aver fissato una orientazione su $\coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1$, e quindi una orientazione su Γ.

Definizione 1.1.2. *Sia $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ una k–curva generica. Diremo che un insieme $A = \{\alpha_i\}$ è un insieme di segmenti per f se:*

(1) *ogni $\alpha_i \subset \mathbb{R}^2$ è un arco orientato, diffeomorfo ad un intervallo chiuso della retta reale, con il punto di partenza in una componente connessa di $\mathbb{R}^2 - \Gamma$ ed il punto finale nella componente connessa illimitata di $\mathbb{R}^2 - \Gamma$;*

(2) $\alpha_i \cap \alpha_j = \varnothing \qquad \forall i \neq j$;

(3) *α_i è trasversale a $\Gamma \qquad \forall i$;*

(4) *gli α_i non contengono alcun incrocio di Γ.*

Diremo che A è un sistema di segmenti per f se in piú:

(5) *da ogni componente connessa limitata di $\mathbb{R}^2 - \Gamma$ parte almeno un arco α_i.*

Denoteremo con A sia $\{\alpha_i\}$ che $\bigcup_i \alpha_i$; sarà chiaro dal contesto a quale dei due ci si starà riferendo. È chiaro che $A \cap \Gamma$ è costituito da un numero finito di punti.

Definizione 1.1.3. *Sia A un insieme di segmenti per f. Un punto $x \in \alpha_i \cap \Gamma$ sarà detto positivo se la curva f attraversa il segmento α_h in x da destra a sinistra, sarà detto negativo nell'altro caso.*

Seguendo Marx [**M**], assegniamo dei nomi — $x_{i,j}^e$ con i, j numeri naturali ed $e = \pm 1$ — ai punti di $A \cap \Gamma$, in modo che:

(1) $x_{i,j}^e \in \alpha_i$;

(2) $x_{i,j}^e$ è positivo se $e = 1$, negativo se $e = -1$;

(3) due punti $x_{i,j}^e$ ed $x_{i,j'}^e$ sono tali che $j < j'$ se e solo se il punto $x_{i,j}^e$ precede $x_{i,j'}^e$ sul segmento α_i rispetto alla sua orientazione.

Ora possiamo associare ad f un insieme di k parole nelle lettere $x_{i,j}$, procedendo nel modo seguente: scegliamo dei punti base p_h in ogni componente Γ_h in modo che non siano né incroci né punti di A e, per ogni h, percorriamo Γ_h, seguendo la sua orientazione, partendo da p_h fino a ritornarvi e scriviamo tutti i nomi dei punti di $A \cap \Gamma$ che incontriamo durante il percorso, ottenendo in tal modo la parola w_h.

Definizione 1.1.4. *Chiamiamo k–parola della k–curva f, rispetto all'insieme di segmenti A, l'insieme:*

$$w = \{w_1, \dots, w_k\}.$$

Osservazione 1.1.5. Osserviamo che w dipende sia dalla scelta dei punti base — scegliendo un differente punto base su Γ_h si altera la parola w_h per l'azione di una permutazione ciclica — che dalla scelta dell'insieme di segmenti A; pertanto, quando si parlerà di "k–parola di f" sottintenderemo "rispetto ad un fissato sistema di segmenti ed a meno di permutazioni cicliche".

Quando si vorrà evidenziare il fatto che la parola w è definita a partire dall'insieme di segmenti A, si scriverà w_A.

Esempio 1.1.6. Per la curva in Fig. 1 si ottiene, ad esempio, la 2–parola $w = \{w_1, w_2\}$ data da:

$$w_1 = x_{4,3}x_{5,2}x_{1,2}x_{2,1}x_{3,2}x_{4,1}x_{1,1}^{-1}x_{3,1}$$
$$w_2 = x_{4,2}^{-1}x_{5,1}^{-1}$$

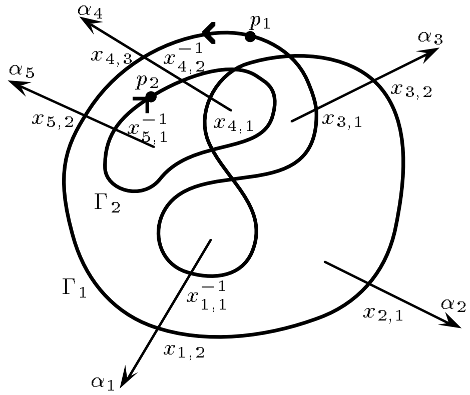


Fig. 1

1.2. Grafi circolari

Definizione 1.2.1. *Sia k un intero positivo, per grafo k–circolare intenderemo un grafo G tale che:*

1. *tutti i vertici di G stanno su k circonferenze orientate e disgiunte $C_1, \dots, C_k$;*
2. *le circonferenze C_h sono parte del grafo;*
3. *G ha un numero pari di vertici, $2n$, etichettati $a_1^{\pm 1}, \dots, a_n^{\pm 1}$;*
4. *ogni coppia di vertici $\{a_i, a_i^{-1}\}$ è collegata da esattamente un lato non contenuto in alcuna circonferenza; —tali lati saranno detti propri—*
5. *non ci sono altri lati oltre a quelli già menzionati ai punti (2), (4).*

Un grafo k–circolare è determinato, a meno di omeomorfismo, da un insieme di k parole nelle lettere $a_1, \dots, a_n$, ottenute nel modo seguente: si fissa un punto base p_h in ogni circonferenza C_h e quindi si percorre ogni circonferenza, a partire dal punto base fino a ritornarvi, seguendo l'orientazione e scrivendo nell'ordine tutti i nomi dei vertici che si sono incontrati. Chiameremo questo insieme di parole la k–parola di G. Analogamente a quanto succede per le parole delle curve, anche la k–parola di un grafo è determinata a meno di permutazioni cicliche.

Osservazione 1.2.2. Supponiamo che G sia un k–grafo, allora l'insieme $\mathcal{S}$ dei suoi lati è diviso nei due sottoinsiemi:

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_1(G) = \{\text{lati congiungenti vertici della stessa circonferenza}\};$$
$$\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_2(G) = \{\text{lati congiungenti vertici di circonferenze distinte}\}.$$

Se supponiamo che G sia connesso e $k \geq 2$, allora chiaramente deve risultare che $\mathcal{S}_2 \neq \emptyset$.

Nel seguito denoteremo con $S_{g,k}$ la superficie compatta, connessa, orientabile di genere g e con k componenti di bordo con una fissata orientazione.

Definizione 1.2.3. *Sia G un grafo k–circolare connesso, diremo che G è immergibile in genere g se e solo se esiste un'applicazione $\varphi : G \to S_{g,k}$ tale che:*

(1) *φ è un omeomorfismo sull'immagine;*
(2) *$\varphi(\bigcup_h C_h) = \partial S_{g,k}$;*
(3) *$\varphi|_{\bigcup_h C_h}$ conserva l'orientazione dotando $\partial S_{g,k}$ dell'orientazione indotta da quella di $S_{g,k}$.*

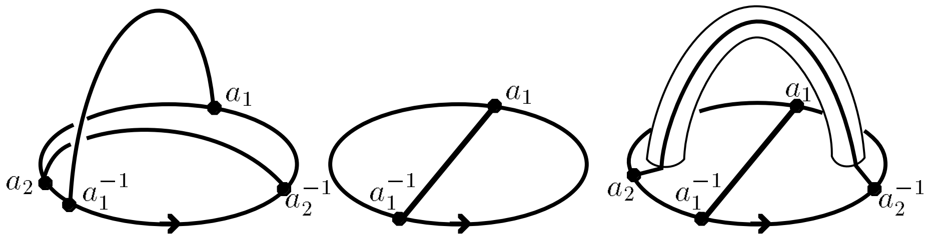


Fig. 2

Osservazione 1.2.4. È ovvio che ogni grafo k–circolare è immergibile in genere g, per un opportuno g. È sufficiente cominciare immergendo le circonferenze come bordo di una superficie arbitraria immergendo quindi gli archi fino a quando questo è possibile; appena succede che non si può immergere piú nessun arco, basta aggiungere alla superficie un manico che connetta le due componenti connesse della superficie cui si tolgono gli archi appena immersi, su cui stanno i vertici dell'arco che non siamo riusciti ad immergere. Si conclude, quindi, per ricorrenza (vedi Fig. 2).

È altresí ovvio che se G è immergibile in genere g, allora è immergibile in genere g' per ogni $g' > g$.

Definizione 1.2.5. *Sia G un grafo k–circolare connesso, definiamo genere di G il numero:*

$$g(G) = \min\{\, g \mid G \text{ è immergibile in genere } g\}.$$

Se G non è connesso e $G_1, \dots, G_l$ sono le sue componenti connesse, definiamo:

$$g(G) = \sum_{i=1}^{l} g(G_i).$$

Definiamo ora due operazioni sui grafi k–circolari, che ci saranno utili per dare una procedura induttiva per il calcolo del genere di un grafo.

Sia G un grafo k–circolare con $k \geq 2$, e sia $w = \{w_1, \dots, w_k\}$ la sua k–parola; sia ℓ un lato proprio di G appartenente all'insieme $\mathcal{S}_2$ definito nell'osservazione all'inizio di questa sezione, supponiamo che i vertici di questo lato siano a_i, a_i^{-1} con $a_i \in w_h$, $a_i^{-1} \in w_j \quad h \neq j$, e supponiamo $w_h = a_i w'_h$, $w_j = a_i^{-1} w'_j$,

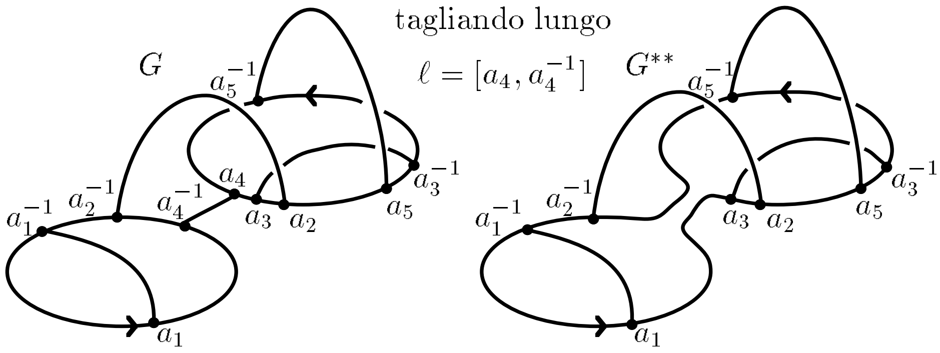
Definizione 1.2.6. *Definiamo taglio di G lungo ℓ il grafo $(k-1)$–circolare G^{**} determinato dalla $(k-1)$–parola:*

$$\{w^{**}\} \cup \{\, w_i \mid i \neq h, j\}$$

dove w^{**} è data da:

$$w^{**} = w'_h w'_j.$$

L'evidente significato geometrico di questa operazione è illustrato in Fig. 3, da cui non è difficile vedere che il grafo G^{**} ha lo stesso numero di componenti connesse del grafo di partenza G.



$w_1 = a_2^{-1} a_1^{-1} a_1 a_4^{-1}$

$w_2 = a_3 a_2 a_5 a_3^{-1} a_5^{-1} a_4$

$w^{**} = a_5^{-1} a_2^{-1} a_1^{-1} a_1 a_3 a_2 a_5 a_3^{-1}$

Fig. 3

Definizione 1.2.7. *Sia G un grafo 1–circolare, a siano ℓ_1, ℓ_2 due lati propri di G. Diremo che ℓ_1 ed ℓ_2 sono allacciati se e solo se $\ell_1 = [a_{h_1}, a_{h_1}^{-1}]$, $\ell_2 = [a_{h_2}, a_{h_2}^{-1}]$ e la parola w di G è della forma:*

$$w = a_{h_1}^{\pm 1} \xi a_{h_2}^{\pm 1} \eta a_{h_1}^{\mp 1} \vartheta a_{h_2}^{\mp 1} \zeta.$$

Definizione 1.2.8. *Sia G un grafo 1–circolare e siano ℓ_1, ℓ_2 due lati propri allacciati, sia $w = a_{h_1}^{\pm 1} \xi a_{h_2}^{\pm 1} \eta a_{h_1}^{\mp 1} \vartheta a_{h_2}^{\mp 1} \zeta$. la parola di G, chiameremo doppio taglio di G lungo ℓ_1, ℓ_2, il grafo 1–circolare G^{***} determinato dalla parola:*

$$w^{***} = \zeta \vartheta \eta \xi.$$

Anche questa operazione ha un evidente significato geometrico, illustrato in Fig. 4.

tagliando lungo

$\ell_1 = [a_2, a_2^{-1}]$

$\ell_2 = [a_3, a_3^{-1}]$

$w = a_2 a_3^{-1} a_4 a_2^{-1} a_3 a_4^{-1} a_1^{-1} a_1$

$w^{***} = a_4^{-1} a_1^{-1} a_1 a_4$

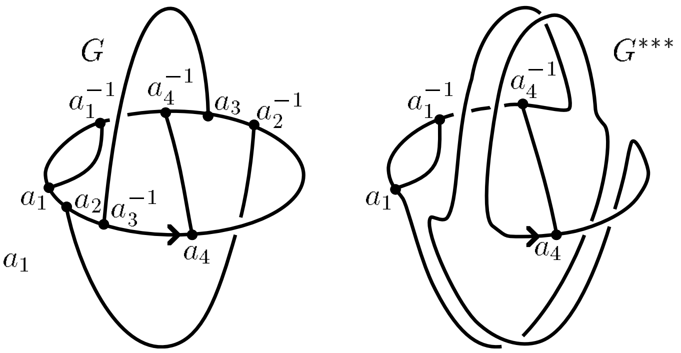


Fig. 4

Proposizione 1.2.9. *Un grafo 1–circolare G è immergibile in genere* 0 *se e solo se G non ha coppie di lati allacciati.*

DIM: Segue facilmente dal fatto che un arco in $\mathbf{D}^2$, congiungente due punti del bordo e contenuto nell'interno di $\mathbf{D}^2$, salvo per gli estremi, sconnette il disco. ▯

Proposizione 1.2.10. *Sia G un grafo 1–circolare e siano ℓ_1, ℓ_2 una coppia di lati allacciati. Sia G^{***} il doppio taglio di G lungo questi due lati. Allora:*

$$g(G^{***}) = g(G) - 1.$$

DIM: Basta provare che G è immergibile in genere g se e solo se G^{***} è immergibile in genere $g-1$.

Supponiamo $G \hookrightarrow S_{g,1}$, allora la proposizione precedente implica che $g \geq 1$, inoltre, un semplice calcolo della caratteristica di Eulero mostra che, tagliando $S_{g,1}$ lungo gli archi ℓ_1 ed ℓ_2, si ottiene una superficie $S^{***} \cong S_{g-1,1}$. Ma gli archi di G non interessati dal taglio insieme a $\partial S^{***} \cong \mathbf{S}^1$ formano esattamente G^{***}, cioè $G^{***} \hookrightarrow S^{***} \cong S_{g-1,1}$.

Viceversa, consideriamo il grafo 1–circolare G' definito dalla parola $a_{h_1}^{\pm 1} a_{h_2}^{\pm 1} a_{h_1}^{\mp 1} a_{h_2}^{\mp 1}$. G' è ovviamente immergibile in genere 1 (Fig. 5), e per, Osservazione 1.2.4, è immergibile in genere $g \geq 1$. Sia $G \hookrightarrow S_{g,1}$ una immersione, tagliando, come in precedenza, $S_{g,1}$ lungo i lati propri di G' otteniamo una superficie S^{***} omeomorfa a $S_{g-1,1}$. A questo punto immergendo opportunamente G^{***} in S^{***} ed incollando i lati tagliati in precedenza, si ottiene l'immersione desiderata $G \hookrightarrow S_{g,1}$. ▯

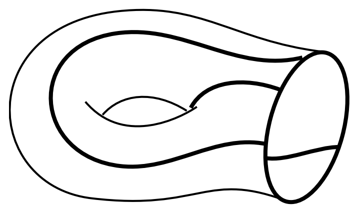


Fig. 5

Proposizione 1.2.11. *Sia G un grafo k–circolare connesso con $k \geq 2$. Siano $\ell \in \mathcal{S}_2$ e G^{**} il grafo (k-1)–circolare ottenuto tagliando lungo ℓ. Allora:*

$$g(G^{**}) = g(G).$$

DIM: Come nella precedente proposizione, è sufficiente provare che G^{**} è immergibile in genere g se e solo se G lo è.

Supponiamo che $G \hookrightarrow S_{g,k}$ sia una immersione di G, come prima un semplice calcolo della caratteristica di Eulero mostra che, tagliando $S_{g,k}$ lungo ℓ si ottiene una superficie diffeomorfa a $S_{g,k-1}$, e pertanto una immersione di G^{**} in genere g.

Viceversa, sia $G^{**} \hookrightarrow S_{g,k-1}$, attaccando una striscia alla componente di bordo corrispondente alla parola w^{**}, lungo i due tratti che separano le lettere della parola w'_h da quelle della parola w'_j, si ottiene la superficie $S_{g,k}$, e nella striscia attaccata si può immergere il lato ℓ, ottenendo l'immersione desiderata. (Fig. 6) ❏

Osservazione 1.2.12. Le proposizioni appena dimostrate permettono di calcolare ricorsivamente il genere di un grafo circolare connesso, e quindi di ogni grafo circolare: si taglia G lungo un lato in $\mathcal{S}_2(G)$, il grafo che si ottiene ha stesso genere di G ma una circonferenza in meno. Si può quindi ripetere l'operazione fino ad ottenere un grafo 1–circolare G_1 che ha lo stesso genere di G. A questo punto, se non ci sono coppie di lati allacciati $g(G) = g(G_1) = 0$, altrimenti si taglia G_1 lungo una coppia di lati allacciati ottenendo un grafo 1–circolare di genere pari a $g(G_1) - 1$. Si può iterare il procedimento fino a quando non si ottiene un grafo 1–circolare G_2 di genere 0. È chiaro che il genere di G_1 non è altro che il numero di tagli doppi che sono stati necessari per passare da G_1 a G_2.

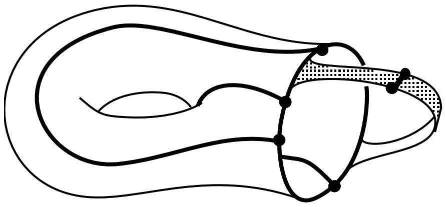


Fig. 6

Notiamo che l'unico dato necessario per portare avanti questo processo è la k–parola di G.

1.3. Assemblaggi

Siano $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ una curva generica, A un insieme di segmenti per f, ed infine $w = \{w_1, \ldots, w_k\}$ la k–parola di f relativa ad A.

Definizione 1.3.1. *Chiamiamo assemblaggio per w un insieme $\mathfrak{A}$, i cui elementi sono* *coppie non ordinate* $\{x_{i,j}^{-1}, x_{i,j'}\}$ *di lettere di* w*, tali che:*

(1) $j < j'$;

(2) *ogni lettera di* w *con esponente negativo (lettera negativa) compare in un elemento di* $\mathfrak{A}$*;*

(3) *ogni lettera di* w *compare in al piú un elemento di* $\mathfrak{A}$*.*

Denoteremo con $\mathcal{A}(w)$ *l'insieme di tutti gli assemblaggi della* k*–parola* w*.*

Definizione 1.3.2. *Dato un assemblaggio* $\mathfrak{A}$*, chiameremo grafo associato ad* $\mathfrak{A}$ *il grafo* k*–circolare* $G(\mathfrak{A})$ *definito nel modo seguente:*

(1) *i vertici di* $G(\mathfrak{A})$ *sono le lettere di* w *che compaiono in qualche elemento di* $\mathfrak{A}$*;*

(2) *tutti i vertici stanno su* k *circonferenze orientate,* $C_1, \ldots, C_k$*, che sono parte del grafo e tali che* $x_{i,j}^{\pm 1} \in C_h$ *se e solo se la lettera* $x_{i,j}^{\pm 1}$ *compare nella parola* w_h*;*

(3) *i vertici che stanno su* C_h *sono ordinati nello stesso modo in cui sono ordinati in* w_h*;*

(4) *due vertici sono collegati da un lato non contenuto in nessuna circonferenza se e solo se le corrispondenti lettere formano un elemento di* $\mathfrak{A}$*.*

Definizione 1.3.3. *Sia* $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}(w)$*, chiameremo genere di* $\mathfrak{A}$ *il numero:*

$$g(\mathfrak{A}) = g(G(\mathfrak{A})).$$

Un assemblaggio $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}(w)$ *sarà detto connesso se e solo se il grafo* $G(\mathfrak{A})$ *è connesso; chiameremo numero di componenti di* $\mathfrak{A}$ *il numero:*

$$l(\mathfrak{A}) = \#\{\text{componenti connesse di } G(\mathfrak{A})\}.$$

1.4. Il teorema di immersione nel piano

Definizione 1.4.1. *Sia* $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ *una* k*–curva generica, diremo che* f *è estendibile se e solo se esistono una superficie* S*, con* $\partial S = \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1$*, ed una immer-*

sione $F : S \to \mathbb{R}^2$, *che conserva l'orientazione e tale che* $F\big|_{\coprod_{h=1}^k \mathbf{S}^1} = f$. *Si dirà anche che* F *estende* f.

Definizione 1.4.2. *Due estensioni* $F_1 : S_1 \to \mathbb{R}^2$, $F_2 : S_2 \to \mathbb{R}^2$ *saranno dette equivalenti a destra (r–equivalenti) se e solo se esiste un diffeomorfismo* $\Phi : S_1 \to S_2$ *tale che* $F_1 = F_2 \circ \Phi$. *Denoteremo con* $E(f) = \{F \mid F \text{ estende } f\}\big/_{\text{r-equivalenza}}$.

Nel seguito denoteremo con $R(f)$ l'usuale numero di rotazione di f, ovvero il grado dell'applicazione tangente:

$$T_f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbf{S}^1; \qquad\qquad T_f : \vartheta \longmapsto \frac{f'(\vartheta)}{|f'(\vartheta)|}.$$

È un fatto ben noto (cfr.[**H**]) che se $F : S \to \mathbb{R}^2$ estende f allora:

$$R(f) = \chi(S) = 2l(S) - k - 2g(S) \tag{H}$$

dove $\chi(S)$, $l(S)$ e $g(S)$ denotano rispettivamente la caratteristica di Eulero, il numero di componenti connesse e la somma dei generi delle componenti connesse di S.

Dimostreremo il seguente:

Teorema 1.4.3. *Sia* $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ *una curva generica e sia* w *una* k*–parola per* f, *definita a partire da un sistema di segmenti. Allora l'insieme* $E(f)$ *è in corrispondenza biunivoca con l'insieme:*

$$\mathcal{A}_m(w) = \big\{\mathfrak{A} \in \mathcal{A}(w) \;\big|\; R(f) = 2l(\mathfrak{A}) - k - 2g(\mathfrak{A})\big\}.$$

Osservazione 1.4.4. L'enunciato di questo teorema è in qualche modo un po' strano, in quanto l'insieme $E(f)$ dipende esclusivamente da f, mentre l'insieme $\mathcal{A}_m(w)$ è definito a partire da una parola per f e quindi dipende, oltre che da f, anche dal sistema di segmenti usato per definire w, e quindi, a priori, potrebbe succedere che date due diverse parole per f, gli insiemi $\mathcal{A}_m(w)$, relativi alle due parole, abbiano un numero di elementi diverso. A posteriori ciò non è possibile.

Per dimostrare il teorema abbiamo bisogno di definire alcune operazioni sulle curve generiche che, seguendo Marx [**M**], chiameremo tagli.

1.5. Tagli

Incominciamo introducendo alcune tecniche e notazioni.

Sia $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ una curva generica e sia $A = \{\alpha_i\}$ un insieme di segmenti per f. Scegliamo intorni chiusi V_i di α_i con diffeomorfismi $\varphi_i : V_i \to [0, t_i] \times [-1, 1]$, tali che:

(1) $V_i \cap V_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$;

(2) $\forall i \quad V_i$ non contiene punti doppi di Γ;

(3) $\forall i \quad \varphi_i(\alpha_i) \subseteq [0, t_i] \times \{0\}$;

(4) $\forall i \quad V_i$ contiene soltanto rami di Γ che intersecano α_i;

(5) se $\Gamma_{i,j}$ denota la componente di $\Gamma \cap V_i$ contenente il punto $x^e_{i,j}$ allora $\forall \vartheta \in f^{-1}(\Gamma_{i,j}) \quad \varphi_i(f(\vartheta)) = (j, e\vartheta + c)$ con c una costante opportuna;

(6) $\forall i \quad \varphi_i$ e $\varphi_{i|\alpha_i} : \alpha_i \to \mathbb{R}$ conservano l'orientazione.

Tecniche standard di topologia differenziale mostrano che siffatti intorni e diffeomorfismi esistono.

Per ogni $j < j'$ fissiamo una curva $\lambda_{j,j'} : [j, j'] \to \mathbb{R}^2$ $\lambda_{j,j'} = (\lambda_{j,j',1}, \lambda_{j,j',2})$ con le seguenti proprietà:

(1) $\frac{1}{3} \leq \lambda_{j,j',2} \leq \frac{2}{3}$;

(2) $\lambda_{j,j'}(j) = \left(j, \frac{2}{3}\right) \quad \lambda_{j,j'}(j') = \left(j', \frac{2}{3}\right)$;

(3) $\lambda_{j,j'}(t) = \left(t, \frac{1}{3}\right) \quad \forall t \in \left[j + \frac{1}{3}, j' - \frac{1}{3}\right]$;

(4) $\lambda^{(n)}_{j,j',1}(j) = \lambda^{(n)}_{j,j',1}(j') = 0 \quad \forall n \geq 1$;

(5) $\lambda^{(n)}_{j,j',2}(j) = \lambda^{(n)}_{j,j',2}(j') = 0 \quad \forall n \geq 2$;

(6) $\lambda'_{j,j',2}(j) = -1 \quad \lambda'_{j,j',2}(j') = 1$.

Le ultime tre condizioni garantiscono che le curve $\lambda_{j,j'}$ si incollano, in modo C^∞, alle rette verticali passanti per i punti $(j, 0)$ e $(j', 0)$.

Considereremo anche la curva $\widetilde{\lambda}_{j,j'}(t) = (\lambda_{j,j',1}(j + j' - t), -\lambda_{j,j',2}(j + j' - t))$. Le due curve appaiono come in Fig. 7.

Siano ora $f_i : [t_i, s_i] \to \mathbb{R}^2, \quad i = 1, \ldots, n$, curve tali che:

$$f_n(s_n) = f_1(t_1); \qquad f_i(s_i) = f_{i+1}(t_{i+1}) \quad \forall i = 1 \ldots n;$$

denoteremo con $f_n f_{n-1} \ldots f_2 f_1$ la curva:

$$f_n f_{n-1} \ldots f_2 f_1 : \mathbf{S}^1 = \coprod_{i=1}^{n} [t_i, s_i] \Big/ _{\{s_1 = t_2, \ldots, s_{n-1} = t_n, s_n = t_1\}} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

tale che $(f_n f_{n-1} \dots f_2 f_1)\big|_{[t_i,s_i]} = f_i$. Ricordiamo che esistono un'unica struttura differenziale ed un'unica orientazione sul quoziente ora definito, che inducono la struttura differenziale e l'orientazione standard su ciascun intervallo, e che inoltre la curva $f_n f_{n-1} \dots f_2 f_1$ è di classe C^∞ se e solo se tutte le f_i lo sono ed in più:

$$f_1^{(h)}(s_1) = f_2^{(h)}(t_2), \dots, f_{n-1}^{(h)}(s_{n-1}) = f_n^{(h)}(t_n), \quad f_n^{(h)}(s_n) = f_1^{(h)}(t_1) \quad \forall h \in \mathbb{N}.$$

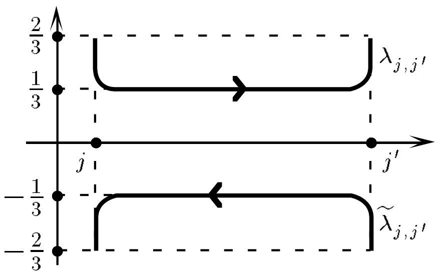


Fig. 7

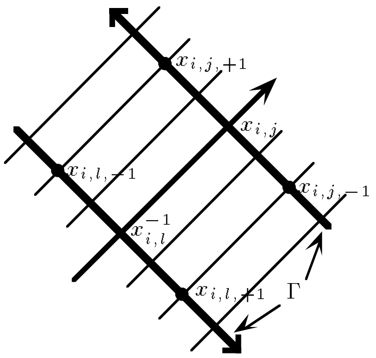


Fig. 8

Dati due punti $\vartheta_0, \vartheta_1 \in \mathbf{S}^1$, denoteremo con $[\vartheta_0, \vartheta_1]$, $(\vartheta_0, \vartheta_1)$, $[\vartheta_0, \vartheta_1)$, $(\vartheta_0, \vartheta_1]$ gli intervalli, contenuti in $\mathbf{S}^1$, determinati percorrendo $\mathbf{S}^1$, secondo la sua orientazione, partendo da ϑ_0 fino ad arrivare a ϑ_1.

Siano f una k–curva generica, ed A un insieme di segmenti per f. Sia $x_{i,j}^e \in \Gamma \cap A$ e sia $\varphi_i : V_i \to [0, t_i] \times [-1, 1]$ come all'inizio di questa sezione. Chiamiamo $x_{i,j,e} = \varphi_i^{-1}(j, \frac{2}{3})$, $x_{i,j,-e} = \varphi_i^{-1}(j, -\frac{2}{3})$ e $\vartheta_{i,j,\pm e}$ il punto tale che $f(\vartheta_{i,j,\pm e}) = x_{i,j,\pm e}$ (vedi Fig. 8).

A questo punto abbiamo gli strumenti per definire i tagli.

Definizione 1.5.1. *Sia $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ a sia w una parola per f, siano $x_{i,j}^{-1}$ e $x_{i,j'}$ lettere in w con $j < j'$. Chiamiamo taglio di primo tipo di f lungo $\{x_{i,j}^{-1}, x_{i,j'}\}$ la 2–curva $f^* : \mathbf{S}^1 \amalg \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ definita da:*

$$f_1^* = f\big|_{[\vartheta_{i,j',+1}, \vartheta_{i,j,-1}]}(\varphi_i^{-1} \circ \lambda_{j,j'}) \qquad f_2^* = f\big|_{[\vartheta_{i,j,+1}, \vartheta_{i,j',-1}]}(\varphi_i^{-1} \circ \widetilde{\lambda}_{j,j'})$$

La definizione si generalizza in modo ovvio alle k–curve $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$, nel caso in cui le lettere $x_{i,j}^{-1}$ ed $x_{i,j'}$ siano nella stessa 1–parola w_h. In questo caso il taglio produce una $(k+1)$–curva $f^* : \coprod_{i=1}^{k+1} \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$.

Definizione 1.5.2. *Siano* $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ *una* k*–curva generica e* w *una sua parola; siano* $x_{i,j}^{-1}$, $x_{i,j'}$ *lettere appartenenti a due diverse 1–parole* w_h, w_l. *Chiamiamo taglio di secondo tipo di* f *lungo* $\{x_{i,j}^{-1}, x_{i,j'}\}$ *la curva* $f^{**} : \left(\coprod_{i\neq h,l} \mathbf{S}^1\right) \amalg \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ *definita da:*

$$f_i^{**} = f_i \qquad \forall i \neq h, j$$
$$f^{**}|_{\mathbf{S}^1} = (\varphi_i^{-1} \circ \lambda_{j,j'}) f|_{[\vartheta_{i.j,+1}.\vartheta_{i,j,-1}]} (\varphi_i^{-1} \circ \widetilde{\lambda}_{j,j'}) f|_{[\vartheta_{i.j',+1}.\vartheta_{i,j',-1}]}$$

Osservazione 1.5.3. Sia w una parola della curva $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$. Supponiamo di avere due coppie, $\{x_{i,j}^{-1}, x_{i,j'}\}$ ed $\{x_{h,k}^{-1}, x_{h,k'}\}$, di lettere di w con $j < j'$ e $k < k'$, e supponiamo che siano allacciate —nel senso della definizione del paragrafo precedente— allora, effettuando un taglio di primo tipo lungo una delle due coppie, la rimanente si troverà ad avere i vertici su due differenti componenti di Γ^*, possiamo allora effettuare un taglio di secondo tipo lungo quest'altra coppia, ottenendo così di nuovo una 1–curva. Non è difficile vedere che il risultato non dipende dall'ordine con cui si sono effettuati i due tagli.

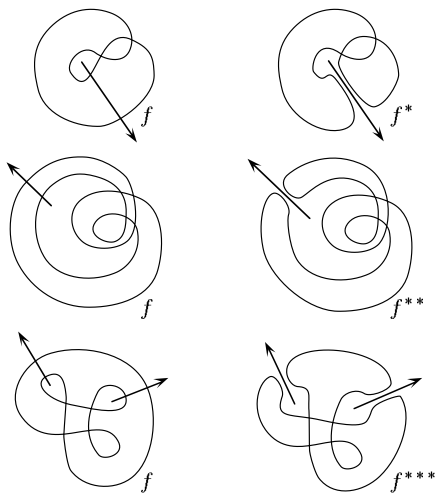


Fig. 9

Si può, pertanto, dare la seguente:

Definizione 1.5.4. *Chiameremo doppio taglio di* $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ *lungo le due coppie allacciate* $\{x_{i,j}^{-1}, x_{i,j'}\}$ e $\{x_{h,k}^{-1}, x_{h,k'}\}$ *la curva:*

$$f^{***} = (f^*)^{**} : \mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

dove i due tagli sono fatti lungo le due coppie in questione.

Le scelte fatte per definire i tagli, garantiscono che, tagliando una curva generica C^∞, si ottiene ancora una curva generica C^∞. In Fig. 9 sono illustrati i tre tipi di taglio.

Proposizione 1.5.5. *Sia f una curva generica, allora valgono le seguenti:*

$$R(f) = R(f^*) - 1; \tag{1}$$

$$R(f) = R(f^{**}) - 1; \tag{2}$$

$$R(f) = R(f^{***}) - 2. \tag{3}$$

DIM: Segue da ragionamenti standard sul numero di rotazione. ❑

Sia ora A un sistema di segmenti per f e sia w la parola determinata da A. Denotiamo con $f^{\#}$ uno qualsiasi dei tre tagli appena definiti e con $\Gamma^{\#}$ il suo supporto.

È chiaro che ogni segmento di A parte da qualche componente connessa di $\mathbb{R}^2 - \Gamma^{\#}$, termina nella componente connessa illimitata di $\mathbb{R}^2 - \Gamma^{\#}$ ed è in posizione generica rispetto a $\Gamma^{\#}$; ossia A è un insieme di segmenti per $f^{\#}$. Non è però detto che A sia ancora un sistema di segmenti per $f^{\#}$ in quanto un taglio, in generale, crea delle nuove componenti connesse da cui non parte alcun segmento di A.

Sia $\{x_{i,j}^{-1}, x_{i,j'}\}$ la coppia lungo cui si taglia (nel caso si stia effettuando un doppio taglio sia $\{x_{h,k}^{-1}, x_{h,k'}\}$ l'altra coppia coinvolta) e siano $j = j_1 < j_2 < \cdots < j_{p+1} = j'$ gli indici tali che x_{i,j_t}^{e}, con $t = 1, \ldots, p+1$, siano tutte e sole le lettere di $\alpha_i \cap \Gamma$ con secondo indice compreso tra j e j' (in caso di doppio taglio siano $k = k_1 < k_2 < \cdots < k_{q+1} = k'$ gli analoghi per l'altra coppia).

Un'analisi locale di quanto avviene durante il taglio, mostra che con il taglio si creano al più $3p-2$ nuove componenti di cui p alla destra del segmento α_i, p alla sua sinistra e le restanti $p-2$ a cavallo di tale segmento (analoga situazione si verifica nell'intorno del segmento α_h in caso di doppio taglio).

È allora possibile (cfr. [**M**] e Fig. 10) aggiungere segmenti $\beta_1, \ldots, \beta_p$ e $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ uscenti rispettivamente dalle componenti a destra e a sinistra di α_i in modo che abbiano una intersezione con la "parte nuova" (corrispondente a $\varphi^{-1} \circ \widetilde{\lambda}_{j,j'}$ ed a $\varphi^{-1} \circ \lambda_{j,j'}$) di Γ^*, e quindi proseguano paralleli ad α_i, e segmenti $\delta_1, \ldots, \delta_{p-2}$ uscenti dalle rimanenti componenti e paralleli ad α_i. Evidentemente, in caso di taglio doppio si dovranno aggiungere anche analoghi segmenti $\widetilde{\beta}_1, \ldots, \widetilde{\beta}_q$, $\widetilde{\gamma}_1, \ldots, \widetilde{\gamma}_q$ e $\widetilde{\delta}_1, \ldots, \widetilde{\delta}_{q-2}$ nell'intorno di α_h.

Definizione 1.5.6. *L'insieme $A^{\#}$, ottenuto aggiungendo ad A i segmenti appena descritti, sarà detto il sistema di segmenti indotto dal taglio.*

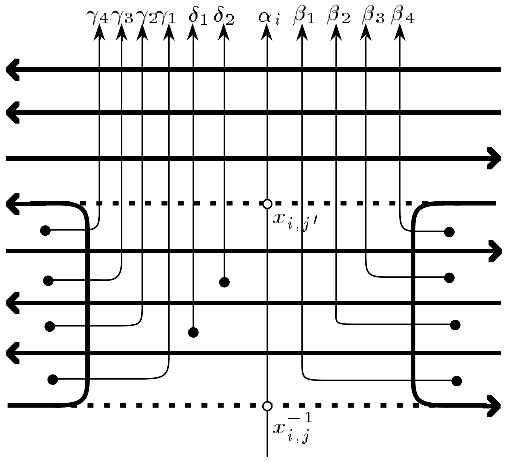


Fig. 10

Vediamo ora come sono fatte le parole di $f^{\#}$ definite da $A^{\#}$.

Chiamiamo $y^e_{s,t}$ i punti di $\Gamma^{\#} \cap \beta_s$, $z^e_{s,t}$ quelli di $\Gamma^{\#} \cap \gamma_s$ e $u^e_{s,t}$ quelli di $\Gamma^{\#} \cap \delta_s$ ed esaminiamo separatamente i tre casi: $\# = *$, $\# = **$, $\# = ***$.

Primo caso Sia $w = x_{i,j}^{-1} \xi x_{i,j'} \eta$, allora l'insieme di segmenti A determina le parole:

$$w'_1 = \eta \qquad w'_2 = \xi \tag{1}$$

rispettivamente per le curve f_1^* ed f_2^*.

Osserviamo innanzitutto che la parte nuova della curva, ossia la parte corrispondente a $\varphi_i^{-1} \circ \lambda_{j,j'}$ e $\widetilde{\varphi}_i^{-1} \circ \lambda_{j,j'}$, non ha intersezioni con i vecchi segmenti. D'altra parte, per come sono stati presi i nuovi segmenti, la parte di Γ_1^* corrispondente a $\varphi_i^{-1} \circ \lambda_{j,j'}$ interseca esattamente ogni segmento γ_s, ed analogamente la parte di Γ_2^* corrispondente a $\widetilde{\varphi}_i^{-1} \circ \lambda_{j,j'}$ interseca esattamente ogni segmento β_s, in un punto positivo, ed in piú questo punto è il primo nel rispettivo segmento. Possiamo pertanto chiamare questo punto $y_{s,1}$ (risp. $z_{s,1}$) e le parole per f_1^* ed f_2^* determinate dai vecchi segmenti e dalle intersezioni ora menzionate saranno allora date rispettivamente da:

$$\widetilde{w}'_1 = z_{1,1} \dots z_{r,1} w'_1 \qquad \widetilde{w}'_2 = y_{r,1} \dots y_{1,1} w'_2 \tag{2}$$

Infine guardiamo all'intersezione della parte vecchia della curva con i nuovi segmenti.

È evidente che soltanto i rami di $\Gamma^* \cap V_i$ che intersecano α_i in punti $x^e_{i,l}$ con $l > j$, intersecano i nuovi segmenti. Più precisamente, il ramo di $\Gamma^* \cap V_i$ passante per il punto $x^e_{i,l}$ interseca i segmenti γ_s e β_s se e solo se $l > j_s$ ed in tal caso in un solo punto, ed analogamente interseca il segmento δ_s se $l > j_{s+1}$. Osserviamo ancora che le intersezioni di questo ramo sono tutte positive o tutte negative secondo che $e = 1$ o $e = -1$. Visto inoltre che i rami di $\Gamma \cap V_i$ non si intersecano tra loro, il secondo indice della loro intersezione con α_i ordina sequenzialmente anche le intersezioni di questi rami con ciascuno dei nuovi segmenti. È allora coerente con la definizione di parola di una curva, chiamare rispettivamente $y^e_{s,l}$, $z^e_{s,l}$ ed $u^e_{s,l}$ l'intersezione, quando esiste, del ramo passante per $x^e_{s,l}$ con i segmenti β_s, γ_s e δ_s.

Osserviamo infine che se $e = 1$ il ramo in questione interseca successivamente i segmenti β_s in ordine decrescente, il segmento α_i, i segmenti δ_s ancora in ordine decrescente, ed infine i segmenti γ_s in ordine crescente; mentre, se $e = -1$, interseca prima i segmenti γ_s in ordine decrescente, poi i δ_s in ordine crescente, quindi α_i ed infine i β_s ancora in ordine crescente.

In definitiva, da tutto quanto detto finora, si può concludere che: le parole w_1^*, w_2^* sono ottenute dalle parole in (2) rimpiazzando ogni lettera $x^e_{i,l}$ con il blocco:

$$\begin{array}{lll} & y_{p,l}\dots y_{1,l}x_{i,l}u_{p-2,l}\dots u_{1,l}z_{1,l}\dots z_{p,l} & \text{se } e = 1, \\ (3) & & \\ & z^{-1}_{p,l}\dots z^{-1}_{1,l}u^{-1}_{1,l}\dots u^{-1}_{p-2,l}x^{-1}_{i,l}y^{-1}_{1,l}\dots y^{-1}_{p,l} & \text{se } e = -1, \end{array}$$

con la convenzione che le lettere $y_{s,l}$ e $z_{s,l}$ compaiono se e solo se $l > j_s$ e la lettera $u_{s,l}$ compare se e solo se $l > j_{s+1}$.

Secondo caso Sia $w = \{w_1, \dots, w_k\}$ la k–parola di f e $w_h = x^{-1}_{i,j}\xi$, $w_l = x_{i,j'}\eta$ le due parole coinvolte nel taglio. Allora la $(k-1)$–parola per f^{**} determinata da A è data da $w'' = \{w''_i \mid i \neq h, l\} \cup \{w''_{h,l}\}$ dove:

$$(4) \qquad w''_i = w_i \quad \forall i \neq h, l \qquad w''_{h,l} = \xi\eta$$

Il contributo della parte nuova della curva è costituito, come nel caso precedente, da due blocchi di lettere positive $z_{1,1}\dots z_{l,1}$ e $y_{l,1}\dots y_{1,1}$. Con soltanto queste intersezioni si ottiene quindi la $(k-1)$–parola $\widetilde{w}'' = \{\widetilde{w}''_i \mid i \neq h, l\} \cup \{\widetilde{w}''_{h,l}\}$ dove:

$$(5) \qquad \widetilde{w}''_i = w_i \quad \forall i \neq h, l \qquad \widetilde{w}''_{h,l} = \xi z_{1,1}\dots z_{r,1}\eta y_{r,1}\dots y_{1,1}$$

Infine la $(k-1)$–parola w^{**} si ottiene da $\widetilde{w}''$ con la stessa sostituzione (3) fatta in precedenza.

Terzo caso Sia $w = x_{i,j}^{-1}\xi x_{h,k}^{-1}\eta x_{i,j'}\zeta x_{h,k'}\vartheta$ la parola di f. Se chiamiamo, come prima, $y_{s,t}^e$, $z_{s,t}^e$, $u_{s,t}^e$ le intersezioni con i segmenti β_s, γ_s, δ_s e $\widetilde{y}_{s,t}^e$, $\widetilde{z}_{s,t}^e$, $\widetilde{u}_{s,t}^e$ quelle con i segmenti $\widetilde{\beta}_s$, $\widetilde{\gamma}_s$, $\widetilde{\delta}_s$, allora dai precedenti due casi esaminati segue che la parola w''' determinata da A è data da:

$$w''' = \vartheta\zeta\eta\xi,$$

mentre la parola w^{***} determinata da A^{***} è ottenuta dalla parola:

$$\widetilde{w}''' = \vartheta z_{1,1}\ldots z_{r,1}\zeta\widetilde{y}_{q,1}\ldots\widetilde{y}_{1,1}\eta y_{r,1}\ldots y_{1,1}\xi\widetilde{z}_{1,1}\ldots\widetilde{z}_{q,1}, \tag{6}$$

mediante le sostituzioni (3) per le lettere $x_{i,l}^e$ e le analoghe per le lettere $x_{h,l}^e$.

Definizione 1.5.7. *Chiameremo le parole w^*, w^{**}, w^{***} le parole indotte dal taglio.*

Con quanto visto fino ad ora, sembra che i tagli rendano le parole piú complesse di quanto già non fossero. Vedremo che, in qualche senso, ciò non è vero anzi vengono semplificate.

Definizione 1.5.8. *Sia w una parola per una curva $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$, una lettera negativa $x_{i,j}^{-1}$ sarà detta terminale se e solo se ogni lettera $x_{i,j'}^e$ di w con $j' > j$ ha esponente $e = 1$.*

Proposizione 1.5.9. *Sia $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ una curva generica e sia w una parola per f. Sia $\{x_{i,j}^{-1}, x_{i,j'}\}$ una coppia di lettere di w con $j < j'$ e $x_{i,j}^{-1}$ terminale. Allora le parole indotte w_1^* e w_2^*, dal taglio di primo tipo di f lungo $\{x_{i,j}^{-1}, x_{i,j'}\}$ hanno un numero di lettere negative strettamente inferiore a quello di w.*

DIM: Le uniche lettere negative introdotte ex–novo in w^* corrispondono a lettere $x_{i,l}^{-1}$ di w con $l > j$. Dato che $x_{i,j}^{-1}$ è terminale, non esistono di tali lettere. D'altra parte la lettera negativa $x_{i,j}^{-1}$ non compare in w^* e quindi si ha la tesi. ∎

Vediamo ora come da un assemblaggio $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}(w)$ si può ottenere, in modo canonico, un assemblaggio $\mathfrak{A}^\# \in \mathcal{A}(w^\#)$, quando si effettui un taglio lungo una coppia $\{x_{i,j}^{-1}, x_{i,j'}\} \in \mathfrak{A}$.

Evidentemente, tutte le coppie di $\mathfrak{A}$, eccetto $\{x_{i,j}^{-1}, x_{i,j'}\}$, sono coppie ammissibili per un assemblaggio di $w^\#$. Inoltre nuove lettere negative vengono introdotte soltanto dalla sostituzione (3); pertanto, se la lettera $y_{s,l}^{-1}$ compare nella parola indotta, ciò significa che la lettera $x_{i,l}^{-1}$ compare in w, ed essendo $\mathfrak{A}$ un assemblaggio, esiste un unico $l' > l$ tale che $\{x_{i,l}^{-1}, x_{i,l'}^{-1}\} \in \mathfrak{A}$. Ma questo significa che anche la lettera $y_{s,l'}$ compare nella parola indotta. Un analogo ragionamento vale anche per le lettere z e u. Abbiamo quindi un modo canonico di appaiare tutte le nuove lettere negative della parola indotta, ottenendo così un assemblaggio $\mathfrak{A}^{\#}$.

Definizione 1.5.10. *Chiameremo assemblaggio indotto dal taglio di f l'assemblaggio $\mathfrak{A}^{\#} \in \mathcal{A}(w^{\#})$ appena descritto.*

Diamo ora alcune proprietà dell'assemblaggio indotto.

Proposizione 1.5.11. *Sia $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ sia w una parola per f e sia $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}(w)$ con $g(\mathfrak{A}) = 0$. Allora $\mathfrak{A}^*$ ha due componenti connesse ed inoltre:*

$$g(\mathfrak{A}^*) = 0.$$

Dim: Dato che $g(\mathfrak{A}) = 0$, allora la coppia $\{x_{i,j}^{-1}, x_{i,j'}\}$ lungo cui si sta tagliando non è allacciata con nessun'altra coppia dell'assemblaggio e quindi, usando le stesse notazioni introdotte per definire la parola indotta, data una qualsiasi altra coppia $\{x_{l,m}^{-1}, x_{l,m'}\} \in \mathfrak{A}$ o entrambe le sue lettere stanno in ξ oppure stanno in η; ma allora, per come sono definiti la parola e l'assemblaggio indotti, si ha che anche le nuove coppie avranno la stessa proprietà —relativamente alle due parole w_1^* e w_2^*. Questo prova che $\mathfrak{A}^*$ ha esattamente due componenti connesse.

Denotiamo con $\mathfrak{A}_1^*$, $\mathfrak{A}_2^*$ le componenti di $\mathfrak{A}$ e poniamo $\mathfrak{A}_i' = \mathfrak{A}_i^* \cap \mathfrak{A}$. È evidente che il grafo $G(\mathfrak{A}_i')$, associato ad $\mathfrak{A}_i'$ è immergibile in genere 0. Ma $G(\mathfrak{A}_i^*)$ è ottenuto da $G(\mathfrak{A}_i')$ aggiungendogli blocchi di lati paralleli a qualche vecchio lato, il che significa che ognuno di questi blocchi è immergibile in un intorno tubolare di un vecchio lato (vedi Fig. 11), ovvero $g(\mathfrak{A}_i^*) = g(\mathfrak{A}_i') = 0$, che è la tesi. ∎

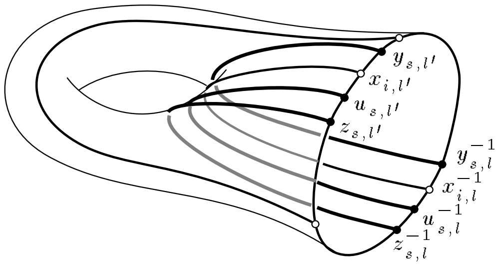


Fig. 11

Proposizione 1.5.12. *Siano w una parola per $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ ed $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}(w)$. Siano $\{x_{i,j}^{-1}, x_{i,j'}\}$, $\{x_{l,m}^{-1}, x_{l,m'}\}$ due coppie allacciate di $\mathfrak{A}$. Sia infine $\mathfrak{A}^{***}$ l'assemblaggio indotto per la parola indotta w^{***} del taglio doppio di f lungo queste due coppie. Allora:*

$$g(\mathfrak{A}^{***}) = g(\mathfrak{A}) - 1$$

Dim: Come prima, sia $\mathfrak{A}''' = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^{***}$, allora, guardando le definizioni si vede facilmente che il grafo $G(\mathfrak{A}''')$ altro non è che il grafo $\big(G(\mathfrak{A})\big)^{***}$ ottenuto effettuando un taglio doppio di $G(\mathfrak{A})$ lungo i lati determinati dalle due coppie in questione (vedi §1.2). Ma allora, per Proposizione 1.2.10, risulta $g(G(\mathfrak{A}''')) = g(G(\mathfrak{A})) - 1$.

Lo stesso ragionamento che conclude la dimostrazione della proposizione precedente, permette allora di concludere che $g(\mathfrak{A}^{***}) = g(G(\mathfrak{A}''')) = g(G(\mathfrak{A})) - 1$. ❑

Proposizione 1.5.13. *Siano w una k–parola per $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ ed $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}(w)$ un assemblaggio connesso. Siano $\{x_{i,j}^{-1}, x_{i,j'}\} \in \mathfrak{A}$ ed $\mathfrak{A}^{**}$ l'assemblaggio indotto per la k–parola indotta w^{**} di f^{**}, il taglio di secondo tipo di f lungo $\{x_{i,j}^{-1}, x_{i,j'}\}$. Allora $\mathfrak{A}^{**}$ è connesso ed inoltre:*

$$g(\mathfrak{A}^{**}) = g(\mathfrak{A})$$

Dim: La dimostrazione è essenzialmente la stessa della proposizione precedente, si usi la Proposizione 1.2.11 invece della 1.2.10. ❑

Le tre proposizioni precedenti spiegano in che senso i tagli semplifichino le curve.

Lemma 1.5.14. *Siano $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ una curva generica, w una parola per f definita da un sistema di segmenti ed $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}(w)$ tale che $g(\mathfrak{A}) = 0$, allora:*

$$R(f) \geq 1$$

Dim: Procediamo per induzione sul numero N di lettere negative in w.

Sia $N = 0$. Risolvendo gli incroci di Γ come mostrato in Fig. 12, si ottiene una curva $\widetilde{\Gamma}$ che ha lo stesso numero di rotazione di f e le cui componenti sono curve semplici. Il fatto che w non ha lettere negative, implica che anche le intersezioni di $\widetilde{\Gamma}$ con i segmenti del sistema A che definisce w sono tutte positive (le modifiche a Γ vengono fatte in un intorno degli incroci e quindi lontano dai segmenti). Per di piú, dato che da ogni componente limitata di $\mathbb{R}^2 - \Gamma$ parte almeno un segmento, dall'interno di ogni componente di $\widetilde{\Gamma}$ parte almeno un segmento. Questi due fatti messi insieme bastano a concludere che ogni componente di $\widetilde{\Gamma}$ è un loop con numero di rotazione 1 (vedi Fig. 13). Questo prova il lemma per $N = 0$.

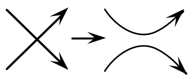


Fig. 12

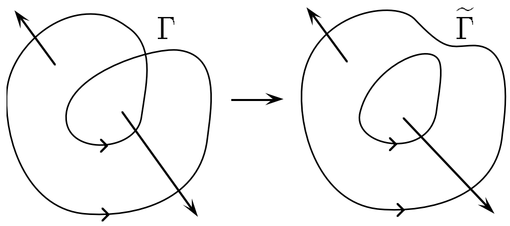


Fig. 13

Sia $N \geq 1$. Sia $x_{i,j}^{-1}$ una lettera negativa terminale di w e sia $x_{i,j'}$ tale che $\{x_{i,j}^{-1}, x_{i,j'}\} \in \mathfrak{A}$. Ma allora le due curve f_1^*, f_2^*, ottenute tagliando lungo questa coppia, hanno parole w_1^*, w_2^* che, per le Proposizioni 1.5.9 e 1.5.11, hanno un numero di lettere negative strettamente inferiore ad N ed hanno assemblaggi $\mathfrak{A}_1^*$, $\mathfrak{A}_2^*$ di genere 0. Applicando la Proposizione 1.5.5 e l'ipotesi di induzione si ottiene:

$$R(f) = R(f^*) = R(f_1^*) + R(f_2^*) - 1 \geq 1 + 1 - 1 = 1,$$

che è la tesi. ∎

Proposizione 1.5.15. *Siano $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ una curva generica e w una parola per f definita da un sistema di segmenti. Allora per ogni assemblaggio $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}(w)$ risulta:*

$$R(f) \geq 1 - 2g(\mathfrak{A}).$$

DIM: Procediamo per induzione sul genere $g = g(\mathfrak{A})$ dell'assemblaggio. Sia $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}(w)$ tale che $g(\mathfrak{A}) = 0$ allora il lemma precedente fornisce la tesi.

Supponiamo $g(\mathfrak{A}) \geq 1$. Per quanto visto sui grafi circolari, esistono almeno due coppie allacciate $\{x_{i,j}^{-1}, x_{i,j'}\}$, $\{x_{l,m}^{-1}, x_{l,m'}\} \in \mathfrak{A}$. Sia f^{***} il doppio taglio di f lungo queste due coppie, allora, per Proposizione 1.5.12, l'assemblaggio indotto $\mathfrak{A}^{***}$ ha esattamente genere $g - 1$. Per ipotesi di induzione risulta quindi:

$$R(f^{***}) \geq 1 - 2(g - 1).$$

Ma usando la Proposizione 1.5.5 si ha:

$$R(f) = R(f^{***}) - 2 \geq 1 - 2(g-1) - 2 = 1 - 2g$$

che è la tesi. ❑

Proposizione 1.5.16. *Sia* $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ *una* k*–curva generica, e sia* w *una parola per* f *definita da un sistema di segmenti. Allora per ogni assemblaggio connesso* $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}(w)$ *risulta:*

$$R(f) \geq 2 - k - 2g(\mathfrak{A}).$$

DIM: Procediamo per induzione sul numero k di componenti della curva.

Se $k = 1$ la proposizione precedente fornisce la tesi. Sia quindi $k \geq 1$. Poichè l'assemblaggio $\mathfrak{A}$ è connesso, esiste almeno una coppia $\{x_{i,j}^{-1}, x_{i,j'}\} \in \mathfrak{A}''$; sia f^{**} il taglio di secondo tipo di f lungo questa coppia. Per Proposizione 1.5.13, l'assemblaggio indotto $\mathfrak{A}^{**}$ ha lo stesso numero di componenti connesse e stesso genere di $\mathfrak{A}$, usando l'ipotesi di induzione e la Proposizione 1.5.5, si ottiene allora:

$$\begin{aligned} R(f) &= R(f^{**}) - 1 \geq 2 - (k-1) - 2g(\mathfrak{A}^{**}) - 1 \\ &\geq 2 - (k-1) - 2g(\mathfrak{A}) - 1 \geq 2 - k - 2g(\mathfrak{A}), \end{aligned}$$

che è la tesi. ❑

Proposizione 1.5.17. *Sia* $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ *una curva generica e sia* w *una parola per* f *definita da un sistema di segmenti. Allora per ogni assemblaggio* $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}(w)$ *risulta:*

$$R(f) \geq 2l(\mathfrak{A}) - k - 2g(\mathfrak{A}).$$

DIM: Siano $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_l$ le componenti connesse di $\mathfrak{A}$, e sia $H_1, \ldots, H_l$ la partizione dell'insieme $\{1, \ldots, k\}$ determinata da tali componenti connesse ossia:

$$H_j = \big\{h \mid \text{almeno una lettera di } \mathfrak{A}_j \text{ sta nella parola } w_h\big\}.$$

Chiaramente se A è il sistema di segmenti per f che definisce la parola w, A è a maggior ragione un sistema di segmenti per la curva $f_{H_j} = f\Big|\Big(\coprod_{h \in H_j} \mathbf{S}^1\Big)$; la parola per f_{H_j}

determinata da A non è altro che $w_{H_j} = \{w_h \mid h \in H_j\}$ ed $\mathfrak{A}_j$ è un assemblaggio connesso per w_{H_j}. Ma allora per la proposizione precedente risulta:

$$R\left(f_{H_j}\right) = 2 - \#H_j - 2g(\mathfrak{A}_j) \qquad \forall j = 1, \dots, l.$$

Sommando fra loro queste relazioni e tenendo presente che

$$\sum_{j=1}^{l} R(f_{H_j}) = R(f), \qquad \sum_{j=1}^{l} \#H_j = k, \qquad \sum_{j=1}^{l} g(\mathfrak{A}_j) = g(\mathfrak{A}),$$

si ottiene la tesi. ❑

Definizione 1.5.18. *Sia $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ una k–curva generica e sia w una k–parola per f definita da un sistema di segmenti. Un assemblaggio $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}(w)$ sarà detto minimale se e solo se:*

$$R(f) = 2l(\mathfrak{A}) - k - 2g(\mathfrak{A}).$$

Denoteremo con $\mathcal{A}_m(w)$ l'insieme degli assemblaggi minimali di w.

Osservazione 1.5.19. Con le notazioni usate nella dimostrazione della proposizione precedente, osserviamo che un assemblaggio $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}(w)$ è minimale se e solo se ogni sua componente connessa $\mathfrak{A}_j$ è minimale per la parola w_{H_j} della curva f_{H_j}.

Osservazione 1.5.20. Osserviamo ancora che, nelle ipotesi delle Proposizioni 1.5.11, 1.5.12 e 1.5.13 rispettivamente, se $\mathfrak{A}$ è un assemblaggio minimale per w allora l'assemblaggio indotto da un qualsiasi tipo di taglio lungo coppie dell'assemblaggio è minimale per la parola indotta. Infatti:

$$\begin{aligned} R(f^*) &= R(f) + 1 = 1 + 1 = 2l(\mathfrak{A}^*); \\ R(f^{**}) &= R(f) + 1 = 2 - k - 2g(\mathfrak{A}) + 1 \\ &= 2 - (k-1) - 2g(\mathfrak{A}^{**}); \\ R(f^{***}) &= R(f) + 2 = 1 - 2g(\mathfrak{A}) + 2 \\ &= 1 - 2(g(\mathfrak{A}) - 1) = 1 - 2g(\mathfrak{A}^{***}). \end{aligned}$$

1.6. Dimostrazione di Teorema 1.4.3

Incominciamo definendo un'applicazione

$$\mathfrak{A} : E(f) \longrightarrow \mathcal{A}_m(w)$$

che dimostreremo mettere in bigezione i due insiemi.

Siano $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ una curva generica, w una parola per f definita a partire dal sistema di segmenti A. Sia $F : S \to \mathbb{R}^2$ una estensione di f. Poichè F è una immersione ed A è in posizione generica rispetto ad f, $F^{-1}(A)$ è costituito da un numero finito di archi semplici disgiunti, con almeno un estremo su ∂S. Dotiamo tali archi dell'orientazione indotta dai segmenti α_i.

Non è difficile vedere che in questo modo la controimmagine di punti positivi è costituita da punti di ∂S su cui termina qualche arco, mentre la controimmagine di punti negativi è costituita da punti, da cui parte qualche arco.

Osserviamo ora che, ognuno di tali archi deve necessariamente terminare su ∂S, in quanto, se ciò non fosse vero, il segmento corrispondente dovrebbe terminare in una componente connessa limitata di $\mathbb{R}^2 - \Gamma$.

Inoltre è evidente che per ogni punto $x_{i,j}^{e}$ in $\Gamma \cap A$ esiste uno ed un solo punto in ∂S che è mandato su esso da F.

Chiamiamo $\widetilde{G}(F)$ l'insieme costituito dagli archi di $F^{-1}(A)$ che partono da punti di ∂S (e quindi vi terminano). È evidente allora che, accoppiando tra loro le lettere di w corrispondenti agli estremi di archi di $\widetilde{G}(F)$, si ottiene un assemblaggio $\mathfrak{A}(F)$ per la parola w. Per di più, detto $G(F)$ l'insieme $\widetilde{G}(F) \cup \partial S$, si ha che $G(F)$ è una realizzazione del grafo associato ad $\mathfrak{A}(F)$ e quindi si ha una immersione $G(\mathfrak{A}(F)) \hookrightarrow S$.

Lemma 1.6.1. *Se $F : S \to \mathbb{R}^2$ ed $F_1 : S_1 \to \mathbb{R}^2$ sono r–equivalenti, allora:*

$$\mathfrak{A}(F) = \mathfrak{A}(F_1).$$

Dim: Immediata dalle definizioni. ∎

Perchè $\mathfrak{A}$ definisca l'applicazione voluta, resta da dimostrare che $\mathfrak{A}(F)$ è effettivamente un assemblaggio minimale. Per fare questo abbiamo bisogno di alcuni lemmi.

Lemma 1.6.2. [**G–T**] *Con le notazioni appena introdotte, F ristretta ad ogni componente connessa di $S - \widetilde{G}(F)$ è iniettiva.*

DIM: Per assurdo siano $p, q \in S - G(F)$ tali che $p \neq q$, $F(p) = F(q) = z$ e sia $\gamma : [0,1] \to S - G(F)$ tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$.

Dato che F è una immersione, possiamo supporre che $p, q \notin F^{-1}(A)$. Infatti se $z \in A$ scegliamo un cammino in un piccolo intorno di z, che parta da z e termini in un punto $z' \notin A$, che tocchi A soltanto nel punto iniziale e che sia sollevabile via F a due cammini disgiunti partenti rispettivamente da p e da q e terminanti in p' e q'. Aggiungendo questi due cammini a γ si ottiene la prima riduzione.

Dato che gli archi in $F^{-1}(A) - \widetilde{G}(F)$ non sconnettono le componenti di $S - \widetilde{G}(F)$, possiamo assumere che il cammino sia contenuto in $S - F^{-1}(A)$.

A meno di una piccola perturbazione, possiamo supporre che $F \circ \gamma$ sia generica. Asseriamo, inoltre, che si può supporre che $F \circ \gamma$ sia una curva semplice (senza autointersezioni). Infatti se $F \circ \gamma$ ha un incrocio, allora esistono $t_0 < t_1 \in [0,1]$ tali che $F(\gamma(t_0)) = F(\gamma(t_1))$ ed $F|_{(t_0,t_1)}$ è iniettiva. Se $\gamma(t_0) \neq \gamma(t_1)$ prendiamo $\gamma' = \gamma|_{[t_0,t_1]}$ al posto di γ, —questa curva ha le stesse proprietà di quella di partenza ed in più è semplice— altrimenti, se $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$, prendiamo la curva $\gamma'' = \gamma|_{[t_1,1]}\gamma|_{[0,t_0]}$, che ha le stesse proprietà di γ ed un incrocio in meno. Evidentemente il processo può essere iterato fino ad ottenere una curva con le proprietà richieste.

In definitiva si hanno due punti $p,q \in S - F^{-1}(A)$ tali che $F(p) = F(q) = z$ ed una curva $\gamma : [0,1] \to S - F^{-1}(A)$ che li unisce e tale che $F \circ \gamma$ è semplice.

Sia ora D un disco immerso iniettivamente in $\mathbb{R}^2$ ed il cui bordo è esattamente la curva $F \circ \gamma$; abbiamo due possibilità: $D \cap \Gamma = \emptyset$, oppure $D \cap \Gamma \neq \emptyset$.

Nella prima eventualità, prendiamo, una omotopia di $F \circ \gamma$ con la curva costante che lasci fisso il punto z e con immagine tutta contenuta in D. Poichè F è un rivestimento al di sopra di ogni componente connessa di $\mathbb{R}^2 - \Gamma$, tale omotopia si solleva ad una omotopia, che lascia fissi gli estremi, di γ con la curva costante ovvero $p = q$, che è una contraddizione.

Supponiamo allora che $D \cap \Gamma \neq \emptyset$. Asseriamo che $\partial D \cap \Gamma \neq \emptyset$, infatti se ciò non fosse vero, esisterebbe una componente connessa di $\mathbb{R}^2 - \Gamma$ interamente contenuta nell'interno di D, pertanto almeno un segmento di A partirebbe dall'interno di D e quindi $\partial D \cap A \neq \emptyset$, che è assurdo.

Asseriamo ora che si può supporre p, $q \in F^{-1}(\Gamma)$. Infatti, sia $t_0 \in [0,1]$ il primo t tale che $F\big(\gamma(t_0)\big) = z_0 \in \Gamma$ e solleviamo tramite F la curva $F \circ \gamma|_{[0,t_0]}$ ad una curva γ_1 con $\gamma_1(0) = q$; dato che $p \neq q$, risulta $\gamma_1(t_0) \neq \gamma(t_0)$, così che la curva $\gamma' = \gamma_1\gamma|_{[t_0,1]}$ ha la proprietà richiesta.

Osserviamo che essendo $\partial D \cap A = \emptyset$ allora anche $D \cap A = \emptyset$, pertanto possiamo scegliere dei punti p_i, uno da ogni componente connessa limitata di $\mathbb{R}^2 - (\Gamma \cup A)$, abbastanza vicini ad A in modo da essere al di fuori di D, così che $F \circ \gamma$ risulti essere omotopicamente banale in $\mathbb{R}^2 - \bigcup\{p_i\}$.

Inoltre, per il modo in cui sono presi i segmenti di A, ogni componente connessa limitata di $\mathbb{R}^2 - (\Gamma \cup A)$ risulta essere diffeomorfa ad un disco aperto e pertanto possiamo trovare una deformazione di $\mathbb{R}^2 - \bigcup\{p_i\}$ su $\Gamma \cup A$, tale che le traiettorie di tale deformazione non attraversino mai $\Gamma \cup A$. questo significa che tale deformazione può essere sollevata tramite F, ad una omotopia H_s di γ che lascia fissi tutti i punti di $F^{-1}(\Gamma \cup A)$, in particolare gli estremi.

Ma ora $H_1(t)$ è una curva nel grafo $F^{-1}(\Gamma \cup A)$ e quindi, a meno di omotopia, possiamo supporre che $H_1(t)$ sia ridotta ed essendo F una immersione, anche la curva $F \circ H_1$ risulta essere ridotta nel grafo $\Gamma \cup A$.

Infine, dato che $F \circ \gamma$ è omotopicamente banale in $\mathbb{R}^2 - \bigcup\{p_i\}$ allora $F \circ H_1$ risulta essere omotopicamente banale in $\Gamma \cup A$, ma l'unica curva omotopicamente banale e ridotta in un grafo è la curva costante, quindi $F \circ H_1$ è costante e di conseguenza anche H_1 è costante e quindi $p = q$, che è assurdo. ∎

Lemma 1.6.3. *Ogni componente connessa di $S - G(F)$ è diffeomorfa ad un disco aperto.*

Dim: Sia C una componente connessa di $S - G(F)$, per il lemma precedente, $F|_C$ è uno a uno e pertanto C è una superficie planare, in altre parole o è diffeomorfa ad un disco aperto oppure ad un disco aperto con dei buchi. Se fosse vera la seconda eventualità, allora $\partial F(C)$ sarebbe necessariamente sconnesso; sia K una delle sua componenti interne. Per come sono definiti gli oggetti in questione $K \subseteq \Gamma \cup A$. Se $K \subseteq \Gamma$ allora K

dovrebbe avere almeno una componente connessa di $\mathbb{R}^2 - \Gamma$ al suo interno e pertanto, almeno un segmento di A partirebbe dall'interno di K e quindi taglierebbe interamente $F(C)$, che è assurdo. Nell'altro caso, se K contenesse parte di un segmento α di A, dato che tutti questi segmenti terminano nella componente connessa illimitata di $\mathbb{R}^2 - \Gamma$, α dovrebbe necessariamente tagliare $F(C)$, che è nuovamente assurdo. ∎

Lemma 1.6.4. $\mathfrak{A}(F)$ *ha lo stesso numero di componenti connesse di* S, *ovvero:*

$$l(\mathfrak{A}(F)) = l(S).$$

DIM: Abbiamo già visto che $G(F)$ è una realizzazione del grafo $G(\mathfrak{A}(F))$, d'altra parte, per il lemma precedente, il grafo $G(F)$ è l'1–scheletro di una cellularizzazione di S e pertanto deve avere lo stesso numero di componenti connesse di S. ∎

Lemma 1.6.5. $g(\mathfrak{A}(F)) \leq g(S)$.

DIM: $G(F)$ dà una immersione del grafo $G(\mathfrak{A}(F))$ in S ed il grafo e la superficie hanno lo stesso numero di componenti connesse, quindi se la componente $G(\mathfrak{A}(F)_i)$ è immersa nella componente S_i di S, risulta allora ovviamente $g(\mathfrak{A}(F)_i) \leq g(S_i)$. Sommando tutte le relazioni relative ad ogni componente, si ottiene la tesi. ∎

Lemma 1.6.6. $\mathfrak{A}(F)$ *è un assemblaggio minimale.*

DIM: Dalla relazione (H) di §1.4 e dai due lemmi precedenti segue che:

$$R(f) = \chi(S) = 2l(S) - k - 2g(S) \leq 2l(\mathfrak{A}(F)) - k - 2g(\mathfrak{A}(F));$$

d'altra parte, per Proposizione 1.5.17, si ha:

$$R(f) \geq 2l(\mathfrak{A}(F)) - k - 2g(\mathfrak{A}(F));$$

e quindi la tesi. ∎

Osservazione 1.6.7. Osserviamo che allora nel Lemma 1.6.5 vale l'uguaglianza, ed inoltre, con le notazioni dalla dimostrazione dello stesso lemma, per ogni i risulta

$g(\mathfrak{A}(F)_i) = g(S_i)$. Quindi l'assemblaggio $\mathfrak{A}(F)$ descrive completamente le topologia della superficie S (numero di componenti connesse e genere di ciascuna di esse).

Osservazione 1.6.8. La costruzione dell'applicazione $\mathfrak{A}$ mostra, in particolare, che se f è estendibile allora per ogni parola w di f definita da un sistema di segmenti, necessariamente risulta $\mathcal{A}_m(w) \neq \varnothing$.

A questo punto dobbiamo dimostrare che l'applicazione $\mathfrak{A} : E(f) \to \mathcal{A}_m(w)$ è una bigezione.

Proposizione 1.6.9. *L'applicazione* $\mathfrak{A} : E(f) \longrightarrow \mathcal{A}_m(w)$ *è iniettiva.*

DIM: Siano $F_1,\ F_2 : S \to \mathbb{R}^2$ due estensioni di f tali che $\mathfrak{A}(F_1) = \mathfrak{A}(F_2)$. Allora per ogni componente connessa $C_i^{(1)}$ di $S - G(F_1)$ esiste una unica componente connessa $C_{j(i)}^{(2)}$ di $S - G(F_2)$ tale che $F_1(C_i^{(1)}) = F_2(C_{j(i)}^{(2)})$, pertanto si possono definire le applicazioni:

$$h_i : C_i^{(1)} \longrightarrow C_{j(i)}^{(2)}$$
$$h_i = \left(F_2\big|_{C_{j(i)}^{(2)}}\right)^{-1} \circ F_1\big|_{C_i^{(1)}}.$$

Analogamente, per ogni arco $\gamma_i^{(1)} \in G(F_1)$, $F_1|_{\gamma_i^{(1)}}$ è uno a uno ed esiste un unico arco $\gamma_{j(i)}^{(2)} \in G(F_2)$ tale che $F_1(\gamma_i^{(1)}) = F_2(\gamma_{j(i)}^{(2)})$, pertanto possiamo definire:

$$k_i : \gamma_i^{(1)} \longrightarrow \gamma_{j(i)}^{(2)}$$
$$k_i = \left(F_2\big|_{\gamma_{j(i)}^{(2)}}\right)^{-1} \circ F_1\big|_{\gamma_i^{(1)}}.$$

Chiaramente, tutte queste applicazioni si incollano tra loro definendo un diffeomorfismo $h : S \to S$ tale che $F_2 \circ h = F_1$. ∎

Resta soltanto da mostrare la surgettività di $\mathfrak{A}$.

Lemma 1.6.10. *Sia* $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ *una curva generica e sia* w *una parola per* f, *definita da un sistema di segmenti. Se* w *non ha lettere negative, allora:*

$$R(f) = v + 1,$$

essendo v il numero di incroci di f.

DIM: Procediamo per induzione su v. Se $v = 0$, allora f è una curva semplice ed il fatto che w non abbia lettere negative, unito al fatto che dall'interno della curva parte almeno un segmento, mostra che f è un loop percorso in senso antiorario e quindi $R(f) = 1$.

Sia $v \geq 1$ e sia p un incrocio di f. Risolviamo l'incrocio p come in Fig. 12 di pag. 20 ed otteniamo in tal modo due 1–curve f_1, f_2, le cui parole, definite dagli stessi segmenti che definiscono w e che sono un sistema di segmenti sia per f_1 che per f_2, sono ancora senza lettere negative. Inoltre se denotiamo con v_i il numero di incroci di f_i, risulta chiaramente $v_1 + v_2 = v - 1$. Usando l'ipotesi di induzione ed il fatto, già menzionato, che risolvere gli incroci non altera il numero di rotazione, si ottiene:

$$R(f) = R(f_1) + R(f_2) = v_1 + 1 + v_2 + 1 = v + 1,$$

ossia la tesi. $\square$

Teorema 1.6.11. (genere 0) [Bl] *Siano $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ una curva generica tale che $R(f) = 1$, w una parola per f, definita da un sistema di segmenti ed $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}_m(w)$ (ovvero $g(\mathfrak{A}) = 0$). Allora esiste una immersione $F : D^2 \to \mathbb{R}^2$ che estende f e tale che $\mathfrak{A}(F) = \mathfrak{A}$.*

DIM: Procediamo per induzione sul numero N di lettere negative in w.

Se $N = 0$ l'unico assemblaggio di w è l'assemblaggio vuoto, che è ovviamente minimale. Il lemma precedente implica che f non ha incroci e quindi è un "embedding"; la tesi è allora una conseguenza del Teorema di Jordan.

Sia $N \geq 1$ e sia $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}_m(w)$. Scegliamo una coppia $\{x_{i,j}^{-1}, x_{i,j'}\} \in \mathfrak{A}$ tale che $x_{i,j}^{-1}$ sia terminale e sia f_1^*, f_2^* il taglio di primo tipo di F lungo questa coppia. Infine siano w_1^*, w_2^*, $\mathfrak{A}_1^*$, $\mathfrak{A}_1^*$ le parole e gli assemblaggi indotti.

Per le Proposizioni 1.5.5 e 1.5.11 ed Osservazione 1.5.20, $R(f_1^*) = R(f_2^*) = 1$ e $\mathfrak{A}_i^* \in \mathcal{A}_m(w_i^*)$, e quindi, poichè w_1^* e w_2^* hanno un numero di lettere negative strettamente inferiore a w possiamo applicare l'ipotesi di induzione per asserire che esistono due immersioni $F_1^* : D^2 \to \mathbb{R}^2$, $F_2^* : D^2 \to \mathbb{R}^2$ che estendono f_1^*, f_2^* e tali che:

$$\mathfrak{A}(F_1^*) = \mathfrak{A}_1^*, \qquad \mathfrak{A}(F_2^*) = \mathfrak{A}_2^*.$$

Ma ora possiamo attaccare una striscia tra i due dischi, ottenendo una superficie $S \cong D^2$, ed estendere le due immersioni F_1^*, F_2^* a tale striscia, in modo da "riempire il taglio", ottenendo così una immersione F che estende f e che, per come sono definiti gli assemblaggi indotti, è tale che $\mathfrak{A}(F) = \mathfrak{A}$ (vedi Fig. 14). ❑

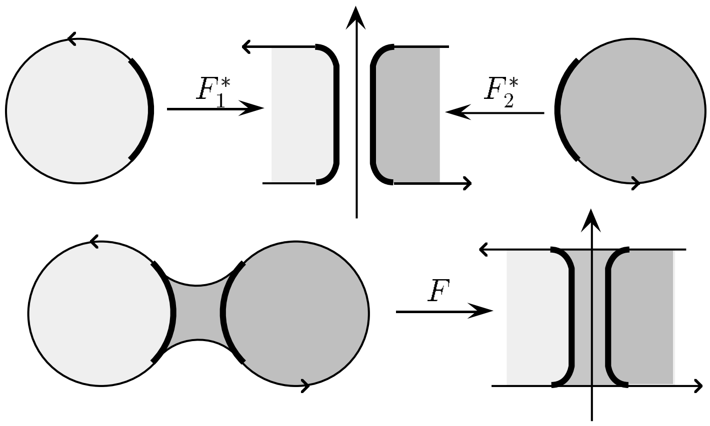


Fig. 14

Teorema 1.6.12. (genere arbitrario) *Siano $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ una curva generica, w una parola per f, definita da un sistema di segmenti, e sia $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}_m(w)$, ovvero $R(f) = 1 - 2g(\mathfrak{A})$. Allora esiste una immersione $F : S \to \mathbb{R}^2$, con $g(S) = g(\mathfrak{A})$, che estende f e tale che $\mathfrak{A}(F) = \mathfrak{A}$.*

DIM: Procediamo per induzione su $g = g(\mathfrak{A})$. Se $g = 0$ il teorema precedente fornisce la tesi.

Supponiamo $g \geq 1$ e siano $\{x_{i,j}^{-1}, x_{i,j'}\}$, $\{x_{l,m}^{-1}, x_{l,m'}\} \in \mathfrak{A}$ due coppie allacciate (esistono in quanto $g \geq 1$). Sia f^{***} il doppio taglio di f lungo queste due coppie e siano w^{***}, $\mathfrak{A}^{***}$ la parola e l'assemblaggio indotti.

Per Proposizione 1.5.12 ed Osservazione 1.5.20, si ha che $g(\mathfrak{A}^{***}) = g - 1$ e $\mathfrak{A}^{***} \in \mathcal{A}_m(w^{***})$. Pertanto, usando l'ipotesi di induzione, esiste una immersione $F^{***} : S^{***} \to \mathbb{R}^2$, con $g(S^{***}) = g - 1$, che estende f^{***} e tale che $\mathfrak{A}(F^{***}) = \mathfrak{A}^{***}$.

A questo punto si possono incollare due strisce a ∂S^{***} ed estendere F^{***} in modo da "riempire i tagli", ottenendo in tal modo una superficie S di genere g ed una estensione $F : S \to \mathbb{R}^2$ di f tale che $\mathfrak{A}(F) = \mathfrak{A}$ (vedi Fig. 15). ▯

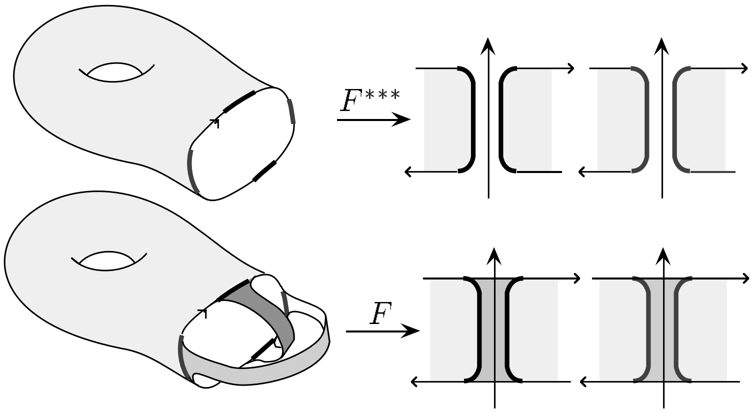


Fig. 15

Teorema 1.6.13. (caso connesso) *Siano $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ una curva generica, w una k–parola per f, definita da un sistema di segmenti, ed $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}_m(w)$ un assemblaggio minimale connesso, ovvero $R(f) = 2 - k - 2g(\mathfrak{A})$). Allora esiste una immersione $F : S \to \mathbb{R}^2$, con S connessa, $\partial S = \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1$ e $g(S) = g(\mathfrak{A})$, che estende f e tale che $\mathfrak{A}(F) = \mathfrak{A}$.*

Dim: Procediamo per induzione su k. Se $k = 1$ la tesi è data dal teorema precedente.

Sia $k \geq 2$ e sia $\{x_{i,j}^{-1}, x_{i,j'}\} \in \mathfrak{A}''$ (esiste poichè l'assemblaggio è connesso). Sia f^{**} il taglio di secondo tipo di f lungo questa coppia e siano w^{**}, $\mathfrak{A}^{**}$ la $(k-1)$–parola e l'assemblaggio indotti.

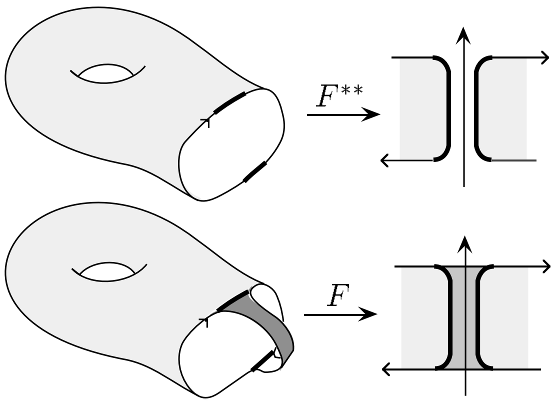


Fig. 16

Per Proposizione 1.5.13 ed Osservazione 1.5.20, si ha che $\mathfrak{A}^{**}$ è connesso, minimale e $g(\mathfrak{A}^{**}) = g(\mathfrak{A})$. Usando l'ipotesi di induzione, si ha l'esistenza di una immersione $F^{**} : S^{**} \to \mathbb{R}^2$, con S^{**} connessa, $\partial S^{**} = \coprod_{h=1}^{k-1}$ e $g(S^{**}) = g(\mathfrak{A}^{**}) = g(\mathfrak{A})$, che estende f^{**} e tale che $\mathfrak{A}(F^{**}) = \mathfrak{A}^{**}$.

Si conclude come nei precedenti due teoremi, attaccando una striscia a ∂S^{**} ed estendendo F^{**} in modo da riempire il taglio (vedi Fig. 16). ∎

Teorema 1.6.14. (caso generale) *Siano $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ una curva generica, w una k–parola per f, definita da un sistema di segmenti, ed $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}_m(w)$, ovvero $R(f) = 2l(\mathfrak{A}) - k - 2g(\mathfrak{A})$. Allora esiste una immersione $F : S \to \mathbb{R}^2$, con $l(S) = l(\mathfrak{A})$, $g(S_i) = g(\mathfrak{A}_i)$ (essendo S_i ed $\mathfrak{A}_i$ le componenti connesse di S ed $\mathfrak{A}$ rispettivamente), che estende f e tale che $\mathfrak{A}(F) = \mathfrak{A}$.*

Dim: Con le notazioni di Proposizione 1.5.17 ed usando l'Osservazione 1.5.19, si ha che ogni $\mathfrak{A}_i$ è un assemblaggio minimale connesso per la parola w_{H_i} di f_{H_i}.

Si conclude, allora, usando il teorema precedente. ∎

Questo conclude la dimostrazione del Teorema 1.4.3.

Osservazione 1.6.15. Mettiamo in evidenza che il teorema appena dimostrato, dà una risposta effettiva e costruttiva al problema dell'esistenza di estensioni di una curva generica.

Abbiamo detto "effettiva", in quanto l'esistenza di tali estensioni è completamente determinata da un oggetto puramente combinatorio, la k–parola, da cui si può facilmente calcolare l'insieme degli assemblaggi minimali.

Abbiamo anche detto "costruttiva" dato che, guardando attentamente la dimostrazione del teorema, si vede che l'assemblaggio $\mathfrak{A}(F)$ induce una cellularizzazione della superficie S tale che f, ristretta alla parte interna di ogni cella è 1–1, mentre ristretta al bordo di tali celle altro non è che il taglio di f lungo tutte le coppie dell'assemblaggio $\mathfrak{A}(F)$.

Pertanto, a posteriori, dato un assemblaggio minimale $\mathfrak{A}$, possiamo costruire un modello per l'estensione corrispondente semplicemente costruendo la superficie secondo la cellularizzazione suggerita dall'assemblaggio, dato che all'interno di ogni cella F è univocamente determinata.

Affrontiamo ora il caso in cui la curva sia contenuta in una superficie arbitraria $\mathbf{N}$. Abbiamo bisogno di introdurre una nozione non standard di numero di rotazione per una curva in una superficie (cfr. [**Ez**], [**Q**]).

1.7. Numero di rotazione

Sia $\mathbf{N}$ una superficie compatta e connessa ed $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ una curva regolare, ossia $f'(t) \neq 0\ \forall t$. Consideriamo il fibrato vettoriale $f^*T\mathbf{N}$ su $\mathbf{S}^1$, pull–back via f del fibrato tangente. Le sezioni di tale fibrato saranno dette campi di vettori lungo f.

Dato che f è regolare, il fibrato $f^*T\mathbf{N}$ contiene un sottofibrato banale τf, di rango uno, generato dalla sezione mai nulla $f'(t)$. Sia $\nu f = f^*T\mathbf{N}/_{\tau f}$. Chiaramente si ha il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} \tau f \oplus \nu f \arrow[r, equal] & f^*T\mathbf{N} \arrow[r, "\tau^* f"] \arrow[d, "f^*\tau"'] & T\mathbf{N} \arrow[d, "\tau"] \\ & \mathbf{S}^1 \arrow[r, "f"'] & \mathbf{N} \end{tikzcd}$$

Definizione 1.7.1. *Chiameremo i due fibrati τf e νf rispettivamente il fibrato tangente di f in $\mathbf{N}$ ed il fibrato normale di f in $\mathbf{N}$.*

Proposizione 1.7.2. *Sia $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ una curva regolare. Sono fatti equivalenti:*

(1) *$f^*T\mathbf{N}$ è banale;*
(2) *νf è banale;*
(3) *νf è orientabile;*
(4) *esiste un campo di vettori lungo f trasversale ad f;*
(5) *$\Gamma = f(\mathbf{S}^1)$ possiede un intorno orientabile.*

Dim: (1) $\iff$ (2) $\iff$ (3) è ovvia in quanto esistono solo due fibrati vettoriali di rango 1 su $\mathbf{S}^1$: il fibrato banale ed il nastro di Mœbious, che non è orientabile.

(2) $\iff$ (4) segue dal fatto che se $\mathbf{v}$ è una sezione mai nulla di νf allora è ovviamente un campo di vettori lungo f trasversale ad f e viceversa se n è un campo di vettori lungo f trasversale ad f allora $\pi_\nu \circ n$ è una sezione mai nulla di νf.

Per quanto riguarda (3) $\iff$ (5), questa segue dal fatto che esiste una immersione $\Phi : \nu f \longrightarrow \mathbf{N}$ che ristretta alla sezione nulla coincide con f. ∎

Definizione 1.7.3. *Si dirà che la curva f ha due lati se verifica una, e quindi tutte, le condizioni della proposizione precedente.*

Si chiamerà lato di f la scelta di una orientazione del fibrato νf.

Osservazione 1.7.4. Chiaramente, scegliere una orientazione del fibrato νf è equivalente a scegliere una sezione mai nulla L di νf, ovvero un campo lungo f trasversale ad f, o ancora a scegliere, una volta fissato un senso di percorrenza per f ossia una orientazione di $\mathbf{S}^1$, una orientazione del fibrato $f^*T\mathbf{N}$ ovvero una orientazione di un intorno di Γ.

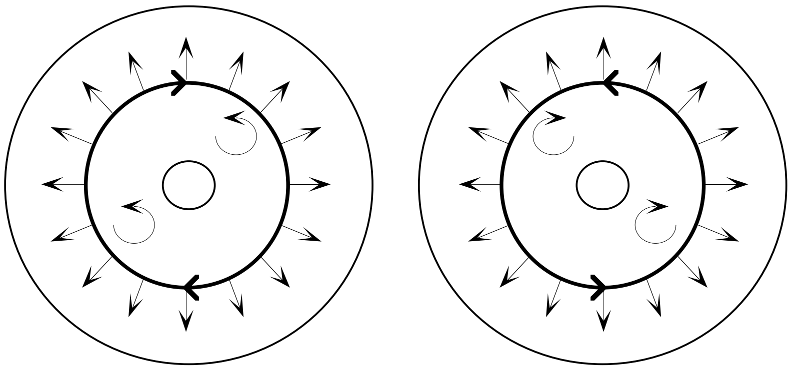


Fig. 17

Converremo, se L è una sezione mai nulla di νf di associare a questa scelta l'orientazione di $f^*T\mathbf{N}$ data da $\big(df(t)[\partial t], L(t)\big)$, essendo ∂t il vettore tangente di $\mathbf{S}^1$ che dà l'orientazione di $\mathbf{S}^1$.

A questo proposito osserviamo ancora che se si inverte il senso di percorrenza della curva, ossia si inverte l'orientazione di $\mathbf{S}^1$, lo stesso lato definisce l'orientazione opposta su $f^*T\mathbf{N}$ (vedi Fig. 17).

Sia f una curva regolare con un lato fissato, e sia X un campo di vettori mai nullo lungo f. Sia $P : f^*T\mathbf{N} \to \mathbb{R}^2$ una proiezione che, fibra per fibra, conserva l'orientazione. Denotiamo con $\varphi_P X$ l'applicazione:

$$\varphi_P X : \mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbf{S}^1$$
$$\varphi_P X : t \longmapsto \frac{PX_t}{|PX_t|}.$$

Definizione 1.7.5. *Siano X, Y campi mai nulli lungo f. Chiameremo numero di rotazione di Y rispetto ad X il numero:*

$$R_X(Y) = \deg(\varphi_P Y) - \deg(\varphi_P X).$$

Dove, ai fini del calcolo dei gradi, si considerano l'$\mathbf{S}^1$ di partenza e l'$\mathbf{S}^1$ d'arrivo dotati rispettivamente dell'orientazione che definisce il senso di percorrenza della curva e dell'orientazione indotta da $\mathbb{R}^2$.

Osservazione 1.7.6. È immediato verificare che se P e P' sono come richieste dalla definizione precedente, allora P e P' sono omotope da cui:

$$\deg(\varphi_P Y) - \deg(\varphi_P X) = \deg(\varphi_{P'} Y) - \deg(\varphi_{P'} X),$$

ovvero quella appena data è una buona definizione.

Osservazione 1.7.7. La definizione precedente è indipendente anche dall'orientazione di $\mathbf{S}^1$, ossia dal senso di percorrenza della curva. Infatti, per quanto osservato in 1.7.4, invertire l'orientazione di $\mathbf{S}^1$ vuol dire invertire anche l'orientazione di $f^*T\mathbf{N}$, ma allora se $P : f^*TN \to \mathbb{R}^2$ è una buona proiezione per la prima orientazione di $\mathbf{S}^1$ e se denotiamo con $\overline{} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la coniugazione, è evidente che $\overline{P} : f^*TN \to \mathbb{R}^2$ è una buona proiezione per la seconda orientazione di $\mathbf{S}^1$. È immediato verificare che $\varphi_{\overline{P}} X = \overline{\varphi_P X}$ e $\varphi_{\overline{P}} Y = \overline{\varphi_P Y}$, da cui per le proprietà del grado si deduce:

$$\deg(\varphi_P Y) - \deg(\varphi_P X) = -\deg(\varphi_{\overline{P}} Y) + \deg(\varphi_{\overline{P}} X)$$

quando si calcolino i gradi con la stessa orientazione in partenza, ma visto che per calcolare $R_X(Y)$ nei due casi, dobbiamo usare due diverse orientazioni, in entrambi i casi si ottiene lo stesso risultato.

Osservazione 1.7.8. Al contrario, se si inverte il lato di f il numero di rotazione di Y rispetto ad X cambia segno, in quanto si inverte l'orientazione su $f^*T\mathbf{N}$, ma non quella sull'$\mathbf{S}^1$ di partenza.

Diamo ora alcune semplici proprietà che ci saranno utili nel seguito.

Proposizione 1.7.9. *Siano X, Y, Z campi mai nulli lungo la curva con lato f, allora:*

(1) $R_X(Z) = R_X(Y) + R_Y(Z)$;
(2) $R_X(Y) = -R_Y(X)$;
(3) $R_X(X)=0$

DIM: Immediata dalla definizione. ∎

Proposizione 1.7.10. *Siano $H, K : \mathbf{S}^1 \times [0,1] \to f^*T\mathbf{N}$ omotopie rispettivamente tra i campi Y_0, Y_1 ed X_0, X_1. Supponiamo che per ogni $s \in [0,1]$ i campi H_s e K_s siano mai nulli. Allora:*

$$R_{X_1}(Y_1) = R_{X_0}(Y_0).$$

DIM: Il fatto che H_s e K_s siano mai nulli permette di definire le applicazioni $\varphi_P H$ e $\varphi_P K : \mathbf{S}^1 \times [0,1] \to \mathbf{S}^1$ definite da:

$$\varphi_P H(t,s) = \frac{PH_s(t)}{|PH_s(t)|}, \qquad \varphi_P K(t,s) = \frac{PK_s(t)}{|PK_s(t)|},$$

che sono evidentemente omotopie tra $\varphi_P X_1$ e $\varphi_P X_0$ e tra $\varphi_P Y_1$ e $\varphi_P Y_0$. Dall'invarianza per omotopia del grado segue la tesi. ∎

Siano ora f una curva con un lato fissato, e sia X un campo su $\mathbf{N}$ che non abbia zeri su Γ.

Proposizione 1.7.11. *Siano L_1 ed L_2 due campi trasversali ad f che ne definiscono il lato, e sia $X^* = f^*X$ il campo lungo f, pull–back di X via f. Allora:*

$$R_{X^*}(L_1) = R_{X^*}(L_2).$$

DIM: Poichè L_1 ed L_2 definiscono lo stesso lato, per ogni $t \in \mathbf{S}^1$ e per ogni $s \in [0,1]$ si ha $H_s(t) = sL_1(t)+(1-s)L_2(t) \neq 0$. Ma allora si conclude per Proposizione 1.7.10. ∎

La proposizione appena dimostrata permette allora di dare la seguente:

Definizione 1.7.12. *Chiameremo numero di rotazione di f rispetto ad X il numero:*

$$R_X(f) = R_{X^*}(L),$$

dove L è un campo trasversale ad f che ne definisce il lato.

Osservazione 1.7.13. Per quanto già osservato in Osservazione 1.7.7, la definizione di numero di rotazione di una curva con un lato f, non dipende dal senso di percorrenza di f.

Vale però la seguente:

Proposizione 1.7.14. *Se si inverte il lato di f il suo numero di rotazione rispetto ad X cambia segno.*

DIM: Sia L un campo trasversale ad L che ne definisce il lato, e sia $P : f^*T\mathbf{N} \to \mathbb{R}^2$ una buona proiezione per questa scelta del lato. È allora evidente che il campo $-L$ definisce il lato opposto, mentre una buona proiezione, per questa scelta di lato è data da $\overline{P}$.

Ma allora, dato che evidentemente $\varphi_{\overline{P}}(-L) = -\overline{\varphi_P L}$ e $\varphi_{\overline{P}} X^* = \overline{\varphi_P X^*}$, dalle proprietà del grado si deduce immediatamente:

$$\deg \varphi_{\overline{P}}(-L) - \deg \varphi_{\overline{P}} X^* = -\deg \varphi_P L + \varphi_P X^*,$$

e quindi la tesi. ■

Osservazione 1.7.15. È immediato verificare che la nozione appena introdotta coincide con la usuale nozione di numero di rotazione per curve piane, quando una tale curva si consideri munita del lato indotto dall'orientazione di $\mathbb{R}^2$ e si calcoli il numero di rotazione rispetto ad un campo costante, ad esempio $X = (1, 0)$.

Osservazione 1.7.16. Le nozioni di lato e di numero di rotazione si generalizzano in modo ovvio alle k–curve regolari $f : \coprod_{h=1}^k \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$.

Definizione 1.7.17. *Sia S una superficie compatta con bordo, sia $F : S \to \mathbf{N}$ una immersione, e sia $f = F|_{\partial S}$ chiameremo lato indotto dall'immersione F sulla curva f quello definito dal campo:*

$$L(t) = dF(t)[m(t)] \qquad \forall t \in \partial S,$$

dove $m(t)$ è un campo di vettori lungo ∂S che punta verso l'interno di S.

D'ora in poi supporremo che il campo X rispetto a cui calcoliamo il numero di rotazione, abbia soltanto zeri isolati.

Proposizione 1.7.18. *Sia $F : \mathbf{D}^2 \to \mathbf{N}$ un embedding, e sia $f = F|_{\partial S}$ munita del lato indotto. Supponiamo che f non passi per gli zeri di X. Allora:*

$$R_X(f) = 1 - \sum_{p \in F(\mathbf{D}^2)} \iota_X(p),$$

dove $\iota_X(p)$ denota l'indice del campo X nel punto p.

DIM: Poichè F è un embedding, ma basterebbe che F fosse una immersione, possiamo identificare i fibrati $T\mathbf{D}^2$ ed $F^*T\mathbf{N}$.

Siano $\widetilde{X}$ il campo su $\mathbf{D}^2$ tale che $dF[\widetilde{X}] = X$ ed m il campo normale diretto verso l'interno del disco su $\mathbf{S}^1$. Sia infine $P : T\mathbf{D}^2 \to \mathbb{R}^2$ una proiezione sulla fibra che conserva l'orientazione su ogni fibra, una volta che si doti $T\mathbf{D}^2 = F^*T\mathbf{N}$ dell'orientazione che su $F^*T\mathbf{N}|_{\mathbf{S}^1} = f^*T\mathbf{N}$ coincide con quella indotta dal lato.

Con l'identificazione fatta all'inizio, è allora evidente che:

$$R_X(f) = \deg(\varphi_P m) - \deg(\varphi_P(\widetilde{X}|_{\mathbf{S}^1})). \tag{1}$$

D'altra parte un semplice calcolo e la definizione di indice mostrano che:

$$\begin{gathered} \deg(\varphi_P m) = 1; \\ \deg(\varphi_P(\widetilde{X}|_{\mathbf{S}^1})) = \sum_{p \in \mathbf{D}^2} \iota_{\widetilde{X}}(p) = \sum_{p \in F(\mathbf{D}^2)} \iota_X(p). \end{gathered} \tag{2}$$

Mettendo insieme la (1) e la (2) si ottiene la tesi. ❑

Per la definizione dell'indice ι degli zeri isolati di un campo, si veda ad esempio [**Mil**].

Osservazione 1.7.19. In particolare, se $F(\mathbf{D}^2)$ contiene tutti gli zeri di X allora:

$$R_X(f) = 1 - \chi(\mathbf{N}),$$

in quanto $\sum_{p \in F(\mathbf{D}^2)} \iota_X(p) = \sum_{p \in \mathbf{N}} \iota_X(p)$, ed è un fatto ben noto che la somma degli indici degli zeri di un campo con solo zeri isolati su una varietà è uguale alla caratteristica di Eulero della varietà stessa (Teorema dell'indice, cfr. [**Mil**])¿

Proposizione 1.7.20. *Sia S una superficie compatta con bordo, e sia $F : S \to \mathbf{N}$ una immersione tale che $F(S)$ non contiene nessuno zero di X. Sia $f = F|_{\partial S}$ dotata del lato indotto da F. Allora:*

$$R_X(f) = \chi(S),$$

dove χ denota, come al solito, la caratteristica di Eulero.

Dim: Dato che F è una immersione, come già osservato nella dimostrazione della proposizione precedente, possiamo identificare i fibrati $F^*T\mathbf{N}$ e TS.

Sia $\widetilde{X}$ il campo su TS tale che $dF[\widetilde{X}] = X$, e sia m il campo su ∂S diretto verso l'interno di ∂S.

Supponiamo che la superficie S sia orientabile, allora è un fatto ben noto che il fibrato tangente di S è banale. Fissiamo una orientazione su S, ossia una orientazione su TS, ed orientiamo ∂S come bordo di S. Sul fibrato $TS|_{\partial S} = f^*T\mathbf{N}$ abbiamo allora due orientazioni: quella indotta dalla fissata orientazione di TS e quella indotta dal lato. È immediato verificare che le due orientazioni coincidono.

Prendiamo $P : TS \to \mathbb{R}^2$ una proiezione sulla fibra che conserva l'orientazione su ogni fibra. Come nella dimostrazione precedente, È allora evidente che:

$$(1) \qquad R_X(f) = \deg \varphi_P m - \deg \varphi_P(\widetilde{X}|_{\partial S}),$$

e, dato che $F(S)$ non contiene zeri di X, il campo $\widetilde{X}$ è non nullo su tutta S; pertanto l'applicazione $\varphi_P(\widetilde{X}|_{\partial S})$ è estendibile a tutta S, e quindi $\deg \varphi_P(\widetilde{X}|_{\partial S}) = 0$. La (1) si riduce a:

$$(2) \qquad R_X(f) = \deg \varphi_P m$$

Sia ora M una estensione a tutta S del campo m con solo zeri isolati $p_1, \ldots, p_n$, e siano $B_1, \ldots, B_n$ intorni disgiunti e diffeomorfi a palle aperte di tali punti. Sia $\widetilde{S} = S - \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Denotiamo con $C_i = \partial B_i$.

L'applicazione $\varphi_P(M|_{\partial\widetilde{S}}) : \partial\widetilde{S} \to \mathbf{S}^1$ ha grado nullo in quanto si estende a tutta $\widetilde{S}$ (cfr. [**Mil**]), ma allora:

$$0 = \deg\varphi_P(M|_{\partial\widetilde{S}}) = \sum_{i=1}^{n} \deg\varphi_P(M|_{C_i}) + \deg\varphi_P(M|_{\partial S}).$$

quando si consideri $\partial\widetilde{S}$ orientato come bordo di $\widetilde{S}$. Sostituendo questa relazione nella (2) si ottiene quindi:

$$R_X(f) = -\sum_{i=1}^{n} \deg\varphi_P(M|_{C_i}). \tag{3}$$

Osserviamo ora che, per definizione di indice di un campo, per ogni i risulta:

$$\deg\varphi_P(M|_{C_i}) = -\iota_M(p_i); \tag{4}$$

d'altra parte, per il già citato Teorema dell'indice, applicabile anche a varietà a bordo se il campo ristretto al bordo è diretto verso l'interno della varietà,

$$\chi(S) = \sum_{i=1}^{n} \iota_M(p_i).$$

Sostituendo (4) in (3) ed usando quest'ultima relazione si ottiene la tesi.

Supponiamo ora che S non sia orientabile. Sia $\widehat{S} \xrightarrow{\pi} S$ il rivestimento doppio orientabile di S. Allora $F \circ \pi : \widehat{S} \to \mathbf{N}$ è una immersione, $\chi(\widehat{S}) = 2\chi(S)$. Per quanto visto nel caso orientabile,

$$2\chi(S) = \chi(\widehat{S}) = R_X\big((F \circ \pi)|_{\partial\widehat{S}}\big). \tag{5}$$

Osserviamo inoltre che fissando una orientazione su ∂S e dotando $\partial\widehat{S}$ dell'orientazione indotta da quella di ∂S, si ha ovviamente:

$$\deg\big(\pi|_{\partial\widehat{S}}\big) = 2. \tag{6}$$

In più con tali orientazioni su ∂S e $\partial\widehat{S}$ se $P : f^*T\mathbf{N} \to \mathbb{R}^2$ è una buona proiezione sulla fibra, allora anche $P \circ d\pi : (f \circ \pi|_{\partial\widehat{S}})^*T\mathbf{N} \to \mathbb{R}^2$.

Siano $\widehat{m}$ ed $\widehat{X}$ i sollevamenti su $\partial\widehat{S}$ e $\widehat{S}$ rispettivamente dei campi m ed $\widetilde{X}$, evidentemente anche $\widehat{m}$ è diretto verso l'interno di $\widehat{S}$. Con semplici calcoli si ottiene allora:

$$\begin{aligned} R_X\big((F\circ\pi)\big|_{\partial\widehat{S}}\big) &= \deg\varphi_{(P\circ d\pi)}\widehat{m} - \deg\varphi_{(P\circ d\pi)}\widehat{X} = \\ &= \deg\big((\varphi_P m)\circ\pi\big) - \deg\big((\varphi_P\widetilde{X})\circ\pi\big) = \\ &= \deg(\varphi_P m)\deg\pi - \deg(\varphi_P\widetilde{X})\deg\pi = \qquad \text{usando la (6)} \\ &= 2\big(\deg(\varphi_P m) - \deg(\varphi_P\widetilde{X})\big) = 2R_X(f). \end{aligned}$$

Questa relazione, unita alla (5) prova la tesi anche in questo caso. ▮

Sia ora X un campo su $\mathbf{N}$ con un unico zero in un punto che chiamiamo ∞.

Proposizione 1.7.21. *Sia $F: S\to\mathbf{N}$ una immersione tale che $f = F|_{\partial S}$ non passi per ∞; allora:*

$$R_X(f) = \chi(S) - \beta\chi(\mathbf{N}),$$

essendo $\beta = \#F^{-1}(\infty)$.

DIM: Sia $\{p_1,\ldots,p_\beta\} = F^{-1}(\infty)$ e siano $B_1,\ldots,B_\beta$ palle intorno ad ogni p_j e tali che $F|_{B_j}$ sia un embedding. Allora, $F\big|_{S-\bigcup B_j}$ è una immersione che non assume il valore ∞ e quindi, per 1.7.20,

$$(1)\qquad R_X\big(F\big|_{\partial(S-\bigcup B_j)}\big) = \chi(S-\bigcup B_j) = \chi(S)-\beta.$$

D'altra parte,

$$(2)\qquad R_X\big(F\big|_{\partial(S-\bigcup B_j)}\big) = R_X\big(F|_{\partial S}\big) + \sum_j R_X\big(F\big|_{\partial_j(S-\bigcup B_j)}\big),$$

dove con $\partial_j(S-\bigcup B_j)$ indichiamo il bordo della palla B_j considerato con il lato indotto come bordo di $S-\bigcup B_j$. Ma allora, se denotiamo con ∂B_j il bordo di B_j con il lato indotto da B_j, si ha:

$$R_X\big(F\big|_{\partial_j(S-\bigcup B_j)}\big) = -R_X\big(F|_{\partial B_j}\big)$$

e quindi per 1.7.18 ed 1.7.19, risulta che per ogni j

$$R_X\big(F|_{\partial_j(S-\bigcup B_j)}\big) = -1 + \chi(\mathbf{N}). \tag{3}$$

Mettendo insieme le relazioni (1), (2) e (3) si ottiene allora:

$$R_X(f) = R_X\big(F|_{\partial S}\big) = \chi(S) - \beta + \beta\big(1 - \chi(\mathbf{N})\big) = \chi(S) - \beta\chi(\mathbf{N})$$

che è la tesi. ∎

Per il numero di rotazione, definito in questo modo, valgono tutte le proprietà standard dell'usuale numero di rotazione, ad esempio valgono le seguenti proposizioni, che useremo nel seguito e di cui omettiamo la dimostrazione che è facile conseguenza di argomenti standard della teoria del grado (invarianza per omotopia ed invarianza per cobordismo del grado [**Mil**]):

Proposizione 1.7.22. *Sia $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ una curva generica con un lato e sia $F : \mathbf{S}^1 \times [0,1] \to \mathbf{N}$ una omotopia di f che conserva il lato (ossia esiste un campo N lungo F tale che per ogni $t \in [0,1]$, $N_t = N|_{\mathbf{S}^1\times\{t\}}$ definisce un lato per F_t ed N_0 definisce il lato fissato per $f = F_0$). Allora $R_X(f) = R_X(F_1)$.*

Proposizione 1.7.23. *Siano $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ una curva generica con un lato e p un incrocio di f; sia $g : \mathbf{S}^1 \coprod \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ la curva con lato ottenuta modificando f in un intorno di p nel modo suggerito in Fig. 18, allora $R_X(f) = R_X(g)$.*

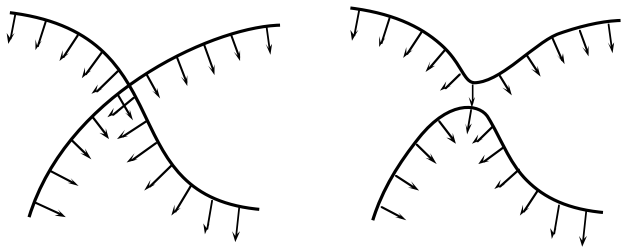


Fig. 18

Estendiamo ora la nozione di grafo circolare, in modo di avere una "buona nozione" di immersione anche in superficie non orientabili.

1.8. Grafi circolari pesati

Definizione 1.8.1. *Sia k un intero positivo, per k–grafo circolare pesato intenderemo un k–grafo circolare (cfr. Definizione 1.2.1) in cui ogni lato proprio è "pesato" con un segno $+$ o $-$.*

Analogamente a quanto visto in §1.2, un k–grafo circolare pesato è determinato univocamente da un insieme di k parole, $w = \{w_1, \ldots, w_k\}$, nelle lettere $a_{1\pm}, \ldots, a_{n\pm}$, dove il sottoindice $+$ indica che il lato proprio uscente dal vertice ha peso $+$ ed il sottoindice $-$ che il lato proprio uscente dal vertice ha peso $-$. Chiameremo questo insieme di parole la k–parola di G.

Nel seguito denoteremo con $S^+_{g,k}$ la superficie compatta, connessa, orientabile di genere g, con k componenti di bordo e con $S^-_{g,k}$ la superficie compatta, connessa, non orientabile di genere g, con k componenti di bordo.

Definizione 1.8.2. *Sia M una varietà orientabile, si definisce semiorientazione di M, una classe di equivalenza di orientazioni, modulo la relazione di inversione.*

Osservazione 1.8.3. Chiaramente se la varietà orientabile M è connessa, su M c'è una unica semiorientazione e quindi la definizione si banalizza.

Definizione 1.8.4. *Sia G un k–grafo circolare pesato connesso; diremo che G è immergibile in genere g^+ [risp. g^-] se e solo se esiste un'applicazione $\varphi : G \to S^+_{g,k}$ [risp. $\varphi : G \to S^-_{g,k}$] tale che:*

(1) *φ è un omeomorfismo sull'immagine;*
(2) *$\varphi(\bigcup_h C_h) = \partial S^+_{g,k}$ [risp. $\partial S^-_{g,k}$];*

inoltre, detto U_ℓ un intorno di $\varphi(\ell)$ omeomorfo a $\ell \times [-1, 1]$,

(3) *per ogni lato proprio ℓ di G, le semiorientazioni indotte su $\partial S^\pm_{g,k} \cap U_\ell$ rispettivamente da U_ℓ e da $\bigcup_h C_h$ (via φ) coincidono se il peso di ℓ è $+$ e viceversa non coincidono se il peso di ℓ è $-$.*

Osservazione 1.8.5. È chiaro che ogni grafo circolare pesato connesso, è immergibile in qualche superficie compatta con k componenti di bordo, basta procedere in modo analogo a quanto fatto in Osservazione 1.2.4, (vedi Fig. 2 di pag. 4 e Fig. 19). Osserviamo inoltre che, se il grafo ha pesi tutti positivi e si inizia il procedimento con una superficie orientata S immergendo i cerchi in modo che la loro orientazione coincida con quella indotta da S, allora ogni volta che si deve aggiungere un manico, questo deve essere aggiunto in modo che la nuova superficie sia ancora orientata.

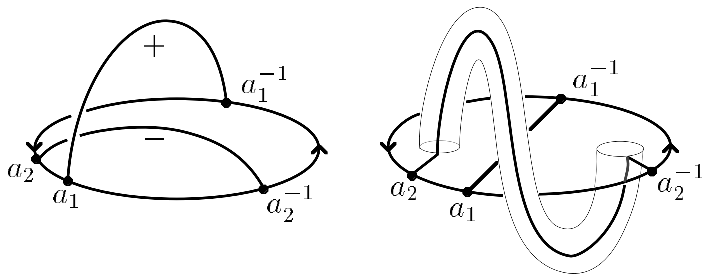


Fig. 19

Definizione 1.8.6. *Due grafi circolari pesati, connessi o meno, saranno detti equivalenti se e solo se coincidono topologicamente e le "sovrastrutture" (orientazione dei cerchi e pesi dei lati) sono ottenute l'una dall'altra con una sequenza finita delle seguenti mosse elementari:*

(E) *si inverte l'orientazione su un cerchio e si invertono tutti i pesi dei lati propri che hanno uno ed un solo vertice su quel cerchio.*

Osservazione 1.8.7. Osserviamo che se G' è ottenuto da G con una mossa di tipo (E) invertendo l'orientazione dell'h–esima circonferenza, allora la parola w' di G' è ottenuta dalla parola w di G nel seguente modo:

(E) Si inverte l'ordine delle lettere nella parola w_h e si invertono i sottoindici $+, -$ di tutte le lettere $a_i^{\pm 1}$ tali che esattamente una delle due, a_i o a_i^{-1} è presente in w_h.

Lemma 1.8.8. *Se G è immergibile in genere g^+ [risp. g^-] allora anche ogni grafo G' ad esso equivalente lo è.*

Dim: Basta mostrare la tesi nel caso che G' sia ottenuto da G mediante una mossa elementare. Ma allora, se $\varphi : G \to S$ è una immersione di G, essa lo è anche per

G'. Infatti sia ℓ un lato di G, se ℓ ha i due vertici sul cerchio in cui si cambia orientazione o se non ha vertici su tale cerchio, la semiorientazione di $\partial S \cap U_\ell$ indotta da φ non cambia, e dato che il peso su tali lati rimane invariato, la condizione (3) di Definizione 1.8.4 è verificata da ℓ (la semiorientazione indotta da U_ℓ è ovviamente la stessa), se invece ℓ ha un solo vertice sul cerchio in questione, la semiorientazione di $\partial S \cap U_\ell$ viene invertita (in quanto su una delle sue due parti l'orientazione indotta da φ rimane la stessa mentre sull'altra viene invertita), d'altra parte a tale lato viene invertito il peso e quindi la (3) di Definizione 1.8.4 è verificata anche in questo caso.

D'altra parte le condizioni (1) e (2) di Definizione 1.8.4 sono ovviamente verificate in quanto fanno riferimento solo alla topologia di G che rimane la stessa per passaggio a grafi equivalenti. ❑

Definizione 1.8.9. *Diremo che il grafo circolare pesato G è positivo se è equivalente ad un grafo circolare pesato con solo lati positivi, altrimenti diremo che è negativo.*

Definizione 1.8.10. *Chiameremo genere del grafo circolare pesato connesso G il numero:*

$$g(G) = \min\{g \mid G \text{ è immergibile in genere } g^+ \text{ o } g^-\};$$

denoteremo inoltre con $h(G)$ il numero:

$$h(G) = \begin{cases} 2g(G) & \text{se } G \text{ è positivo} \\ g(G) & \text{se } G \text{ è negativo,} \end{cases}$$

che chiameremo genere pesato. Se G non è connesso e $G_1, \ldots, G_l$ sono le sue componenti connesse, poniamo:

$$g(G) = \sum_{i=1}^{l} g(G_i); \qquad h(G) = \sum_{i=1}^{l} h(G_i).$$

Proposizione 1.8.11. *Siano G e G' grafi circolari pesati connessi, equivalenti; allora $g(G) = g(G')$.*

DIM: Segue ovviamente dal lemma precedente. ❑

Proposizione 1.8.12. *Un grafo circolare pesato connesso è immergibile in una superficie orientata se e solo se è positivo.*

DIM: Se G è un grafo con lati tutti positivi, per quanto osservato in 1.8.5, G è immergibile in una superficie orientata, e per tanto da 1.8.8 segue una implicazione. Viceversa, sia G immergibile in una superficie orientabile S, fissiamo una orientazione su S e dotiamo ∂S dell'orientazione indotta. Tramite l'immersione riportiamo queste orientazioni sui cerchi di G e consideriamo il grafo G' equivalente a G determinato da tali orientazioni dei cerchi. Sempre per 1.8.8, l'immersione di G è una immersione anche per G', ma allora, poichè le orientazioni di $\partial S \cap U_\ell$ indotte rispettivamente dall'immersione e dall'orientazione di S coincidono per costruzione, tutti i lati di G' devono necessariamente avere pesi positivi. Questo conclude la dimostrazione. ❏

Lemma 1.8.13. *Sia G un grafo circolare pesato connesso, immerso in modo minimale in una superficie S. Allora ogni componente connessa di $S - G$ è un disco aperto.*

DIM: Osserviamo innanzitutto che ogni componente connessa di $S - G$ è una superficie compatta con bordo privata del bordo. Se una di queste componenti C non fosse un disco, potremmo sostituirla con una unione disgiunta di dischi (uno per ogni componente di bordo di C), ottenendo in tal modo una nuova superficie S' in cui si può ancora immergere G. D'altra parte, poichè ogni superficie compatta, connessa, con k componenti di bordo ha caratteristica di Eulero strettamente inferiore a quella dell'unione disgiunta di k dischi, la superficie S avrà anch'essa caratteristica di Eulero strettamente inferiore a quella di S' e quindi $g(S') < g(S)$, che è contro l'ipotesi che l'immersione di G in S sia minimale. ❏

Proposizione 1.8.14. *Sia G un grafo circolare pesato connesso, positivo. Se G è immerso in modo minimale in S, allora S è orientabile.*

DIM: La condizione (3) di 1.8.4, unita al fatto che G è positivo, garantisce che si possono scegliere le orientazioni sui dischi che costituiscono $S - G$, in modo che esse si incollino a dare una orientazione globale di S. ❏

La proposizione appena dimostrata assieme a 1.8.12, permette allora di concludere che il genere di un grafo determina univocamente la superficie in cui si immerge minimalmente, ossia vale la seguente:

Proposizione 1.8.15. *Sia G un k–grafo circolare pesato, connesso e sia $g = g(G)$. Allora G si immerge minimalmente in $S^+_{g,k}$ se e solo se è positivo; invece si immerge minimalmente in $S^-_{g,k}$ se e solo se è negativo.*

Osservazione 1.8.16. Osserviamo che le ultime proposizioni dimostrate, sono state enunciate per grafi circolari pesati connessi. Non è difficile vedere che gli stessi enunciati valgono, ragionando sulle singole componenti connesse, anche nel caso di grafi non connessi.

Analogamente a quanto fatto in §1.2, definiamo alcune operazioni sui grafi circolari pesati, che permettono il calcolo algoritmico del genere di tali grafi. Siano $\mathcal{S}_1(G)$ ed $\mathcal{S}_2(G)$ come in §1.2.

Sia G un k–grafo circolare pesato, con $k \geq 2$, si $w = \{w_1, \ldots, w_k\}$ la sua k–parola e sia $\ell \in \mathcal{S}_2$ un lato positivo di G. Siano a_i e a_i^{-1} i suoi vertici con $a_i \in w_h$, $a_i^{-1} \in w_j \quad h \neq j$, a meno di permutazioni cicliche possiamo supporre quindi che $w_h = a_i w'_h$ e $w_j = a_i^{-1} w'_j$.

Definizione 1.8.17. *Chiameremo taglio di G lungo ℓ il $(k-1)$–grafo circolare pesato G^{**} determinato dalla $(k-1)$–parola:*

$$\{w^{**}\} \cup \{\, w_i \mid i \neq h, j\}$$

dove w^{**} è data da:

$$w^{**} = w'_h w'_j$$

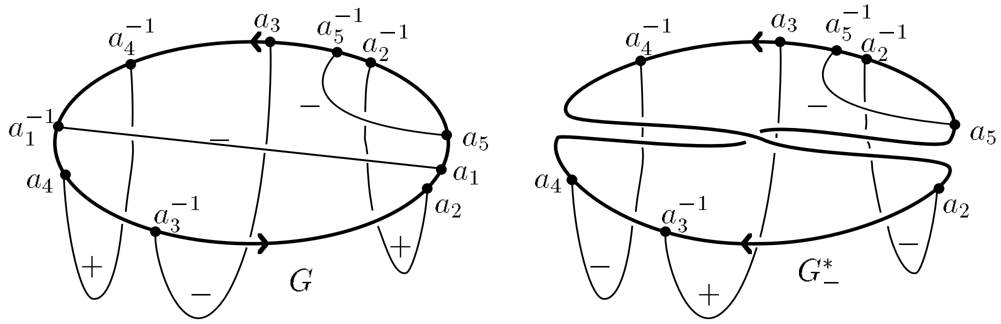
Definizione 1.8.18. *Sia G un 1–grafo circolare pesato. Due lati propri ℓ_1 ℓ_2 di G, di vertici rispettivamente $a_i^{\pm 1}$ ed $a_j^{\pm 1}$, saranno detti allacciati se la parola w di G è del tipo:*

$$w = a_i^{\pm 1} \xi a_j^{\pm 1} \eta a_i^{\mp 1} \zeta a_j^{\mp 1} \vartheta.$$

Definizione 1.8.19. *Sia G un 1–grafo circolare pesato, e siano ℓ_1, ℓ_2 due lati allacciati e positivi. Sia w, come nella precedente definizione, una parola per G. Chiameremo taglio di G lungo ℓ_1, ℓ_2 l'1–grafo circolare pesato definito dalla parola:*

$$w^{***} = \vartheta \zeta \eta \xi.$$

tagliando lungo $\ell = \{a_1, a_1^{-1}\}$



$$w = a_{1-}a_{5-}a_{2+}^{-1}a_{5-}^{-1}a_{3+}a_{4+}^{-1}a_{1-}^{-1}a_{4+}a_{3-}^{-1}a_{2+}$$

$$w^*_- = a_{5-}a_{2-}^{-1}a_{5-}^{-1}a_{3+}a_{4-}^{-1}a_{2-}a_{3+}^{-1}a_{4-}$$

Fig. 20

Definizione 1.8.20. *Sia G un 1–grafo circolare pesato, sia ℓ un lato proprio, negativo di G, di vertici $a_i^{\pm 1}$. Sia $w = a_{i-}\xi a_{i-}^{-1}\eta$ una parola per G. Chiameremo taglio di G lungo ℓ l'1–grafo circolare pesato G^*_- definito dalla parola:*

$$w^*_- = \widetilde{\xi}\bar{\eta}$$

dove $\widetilde{\xi}$ è ottenuta da ξ invertendo i segni in basso di tutte le lettere a_i che sono presenti una sola volta in ξ, mentre $\bar{\eta}$ è ottenuta da η con la stessa operazione seguita da una inversione dell'ordinamento delle lettere.

Le operazioni definite in 1.8.17 e 1.8.19 sono essenzialmente le stesse definite in §1.2 (1.2.6 e 1.2.8) ed il loro significato geometrico è illustrato in Fig. 3 di pag. 5 e Fig. 4 di pag. 6; per quanto riguarda l'operazione definita in 1.8.20, il suo significato geometrico è illustrato Fig. 20.

Proposizione 1.8.21. *Sia G un k–grafo circolare pesato, connesso e con $k \geq 2$; sia $\ell \in \mathcal{S}_2$ un lato positivo. Allora G è immergibile in $S^{\pm}_{g,k}$ se e solo se il grafo G^{**}, ottenuto tagliando G lungo ℓ, è immergibile in $S^{\pm}_{g,k-1}$.*

DIM: Sia $G \subset S = S^{\pm}_{g,k}$, sia S' la superficie ottenuta tagliando S lungo ℓ. Chiaramente risulta:

$$\chi(S) = \chi(S') - 1$$

e, se denotiamo con $k(S)$ il numero di componenti di bordo della superficie S, si ha:

$$k(S) = k(S') + 1.$$

Ma ora,

$$\chi(S) = \begin{cases} 2 - k(S) - 2g(S) & \text{se } S \text{ è orientabile} \\ 2 - k(S) - g(S) & \text{se } S \text{ non è orientabile} \end{cases}$$

e pertanto:

$$\chi(S') = \chi(S) + 1 = \begin{cases} 2 - k(S') - 2g(S) & \text{se } S \text{ è orientabile} \\ 2 - k(S') - g(S) & \text{se } S \text{ non è orientabile} \end{cases}$$

Dato che, evidentemente, S è orientabile se e solo se anche S' lo è, risulta che $S' = S^{\pm}_{g,k-1}$.

D'altra parte, ciò che rimane di G dopo il taglio di S non è altro che G^{**} e quindi G^{**} è immergibile in $S^{\pm}_{g,k-1}$.

Viceversa, sia $G^{**} \subset S = S^{\pm}_{g,k-1}$. Si attacchi una striscia alla componente di bordo corrispondente alla parola w^{**} in modo che:

(1) la semiorientazione del bordo della striscia (indotta dalla striscia) coincida con la semiorientazione della parte di ∂S su cui viene attaccata;

(2) la striscia congiunga le due parti di bordo che separano i vertici dati da w'_h da quelli dati da w'_j.

Si ottiene in tal modo una superficie $\widetilde{S} = S^{\pm}_{g,k}$ in cui è immerso il grafo G privato del lato ℓ. Non è difficile vedere che le condizioni (1) e (2) garantiscono che si può immergere nella striscia anche il lato ℓ, ottenendo l'immersione desiderata per G. (cfr. Proposizione 1.2.11 e Fig. 6 di pag. 8) ∎

Proposizione 1.8.22. *Sia G un 1–grafo circolare pesato e sia ℓ un lato negativo. Allora, G^*_- è immergibile in $S^-_{g,1}$ [risp. $S^+_{g,1}$] se e solo se G è immergibile in $S^-_{g+1,1}$ [risp. $S^-_{2g+1,1}$].*

DIM: La dimostrazione è analoga alla precedente. Dato che G ha un lato negativo, per 1.8.12, G è immergibile soltanto in superficie non orientabili. Sia quindi $G \subset S^-_{g,1}$. Tagliando S lungo ℓ, si ottiene allora una superficie S' con una sola componente di bordo (dato che, se U è un intorno di ℓ, le semiorientazioni indotte su $U \cap \partial S$, rispettivamente da U e da ∂S, non coincidono), e con caratteristica di Eulero $\chi(S') = \chi(S) + 1 = 1 - g + 1$.

Ma allora, o S' non è orientabile, e quindi $S' = S^-_{g-1,1}$ oppure S' è orientabile (in particolare g è dispari) ed $S' = S^-_{(g-1)/2,1}$.

D'altra parte,ciò che resta di G dopo il taglio è esattamente G^*_-, e quindi si ha una implicazione.

Viceversa, sia $G^*_- \subset S$, attacchiamo una striscia a ∂S in modo che:

(1) la semiorientazione del bordo della striscia, indotta dalla striscia, non coincida con quella indotta da ∂S;

(2) la striscia congiunga le due parti di ∂S che separano i vertici determinati da $\widetilde{\xi}$ da quelli determinati da $\bar{\eta}$.

Chiaramente la superficie $\widetilde{S}$ così ottenuta, ha caratteristica di Eulero $\chi(\widetilde{S}) = \chi(S) - 1$, ha una sola componente di bordo, non è orientabile e quindi

$$\widetilde{S} = \begin{cases} S^-_{2g+1,1} & \text{se } S \text{ è orientabile;} \\ S^-_{g+1,1} & \text{se } S \text{ non è orientabile;} \end{cases}$$

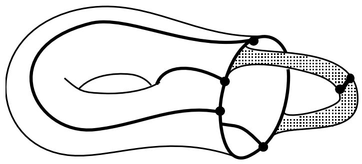


Fig. 21

in più in $\widetilde{S}$ vi è immerso il grafo G privato del lato ℓ e non è difficile vedere che nella striscia appena attaccata si può immergere il lato ℓ (vedi Fig. 21). ❑

Proposizione 1.8.23. *Sia G un 1–grafo circolare pesato positivo, e siano ℓ_1 ed ℓ_2 due lati allacciati. Allora G è immergibile in $S^+_{g,1}$ se e solo se G^{***} è immergibile in $S^+_{g-1,1}$.*

DIM: La stessa di 1.2.10 ❑

Proposizione 1.8.24. *Sia G un 1–grafo circolare pesato positivo, G è immergibile in $\mathbf{D}^2$ se e solo se non ha lati allacciati.*

DIM: La stessa di 1.2.9 ❑

Le proposizioni appena dimostrate, ci permettono di calcolare il genere di un k–grafo circolare pesato connesso, procedendo con tagli successivi nel modo seguente:

se $k > 1$ prendiamo un lato $\ell \in \mathcal{S}_2$ (esiste perchè G è connesso), a meno di equivalenza, possiamo supporre che tale lato sia positivo, tagliamo lungo ℓ ed otteniamo un $(k-1)$–grafo circolare pesato che, per 1.8.21, ha lo stesso genere di G. Con tagli successivi ci riconduciamo quindi a dover calcolare il genere di un 1–grafo circolare pesato.

Sia ora ℓ un lato negativo di G, tagliamo lungo ℓ ed otteniamo il grafo G_-^* che, per 1.8.22, ha genere

$$g(G_-^*) = \begin{cases} \frac{g(G)-1}{2} & \text{se } G_-^* \text{ è positivo;} \\ g(G) - 1 & \text{se } G_-^* \text{ è negativo.} \end{cases}$$

Quindi si itera tale procedimento, e dopo un numero finito di passi p_1 si ottiene sicuramente un grafo positivo G' (eventualmente senza lati propri). Si ha quindi:

$$g(G') = \frac{g(G) - p_1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad g(G) = 2g(G') + p_1.$$

In questo modo ci siamo ricondotti a calcolare il genere di un 1–grafo circolare pesato, positivo G'.

Siano allora ℓ_1 ed ℓ_2 due lati allacciati, tagliamo lungo questi due lati ed otteniamo un grafo G'^{***} positivo che, per 1.8.23, ha genere:

$$g(G'^{***}) = g(G') - 1.$$

Si itera il procedimento fino ad ottenere, dopo p_2 passi, un grafo circolare pesato, G'', senza lati allacciati che, per 1.8.24, ha genere zero. Allora:

$$g(G') = g(G'') + p_2 = p_2.$$

In definitiva si ha:

$$g(G) = \begin{cases} 2p_2 + p_1 & \text{se } G \text{ è negativo;} \\ p_2 & \text{se } G \text{ è positivo.} \end{cases}$$

1.9. Parole ed assemblaggi

Siano $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ una curva generica (cfr. Definizione 1.1.1), Γ il supporto di f e sia $\infty \in \mathbf{N}$ un punto fissato.

Definizione 1.9.1. *Chiameremo insieme di segmenti per f un insieme $R = \{r_i\} = A \cup \Omega$, con $A = \{\alpha_i\}$ e $\Omega = \{\omega_j\}$, i cui elementi saranno chiamati segmenti, tale che:*

(1) *ogni α_i è un arco orientato liscio diffeomorfo ad un segmento della retta reale, con il punto iniziale in una componente connessa di $\mathbf{N} - \Gamma$, ed il punto finale in ∞;*

(2) *gli ω_j sono dei rappresentanti lisci (diffeomorfi ad $\mathbf{S}^1$) di un sistema di generatori minimale di $\pi_1(\mathbf{N}, \infty)$;*

(3) *gli α_i e gli ω_j sono in posizione generica rispetto a Γ, ovvero non passano per gli incroci e sono trasversali a Γ;*

(4) *due segmenti si intersecano soltanto in ∞;*

Diremo che R è un sistema di segmenti per f se in più:

(5) *da ogni componente connessa non contenente ∞, parte almeno uno dei segmenti α_i.*

Sia $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ una curva generica con un lato (cfr. Definizione 1.7.3) e sia R un insieme di segmenti per f. Fissiamo un intorno U_∞ di ∞ tale che $U_\infty \cap \Gamma = \emptyset$, per ogni $r \in R$ fissiamo un intorno orientabile U_r di $r - U_\infty$ in $\mathbf{N} - U_\infty$ sul quale scegliamo una orientazione. Assegniamo dei nomi — $x^e_{i,j,\mu}$ con i e j numeri naturali ed $e, \mu = \pm 1$ — alle intersezioni di $\Gamma \cap R$, con le seguenti regole:

(1) $x^e_{i,j,\mu} \in r_i$;

(2) $e = +1$ oppure $e = -1$ secondo che il segmento r_i attraversi la curva dalla parte contrassegnata dal lato all'altra o viceversa (vedi Fig. 22);

(3) $\mu = +1$ oppure $\mu = -1$ secondo che l'orientazione di Γ seguita da quella del segmento r_i si compongano o meno, nel punto $x^e_{i,j,\mu}$, a dare l'orientazione di U_{r_i} oppure no (vedi Fig. 22);

(4) due punti $x^e_{i,j,\mu}, x^e_{i,j',\mu'} \in r_i$ sono tali che $j < j'$ se e solo se il punto $x^e_{i,j,\mu}$ precede $x^e_{i,j',\mu'}$ rispetto all'orientazione di r_i.

Definizione 1.9.2. *Chiameremo k–parola della k–curva $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ l'insieme:*

$$w = \{w_1, \ldots, w_k\},$$

di parole determinate con lo stesso procedimento usato in Definizione 1.1.4.

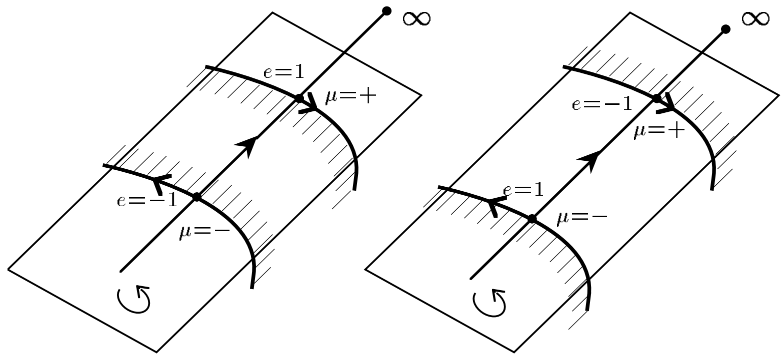


Fig. 22

Definizione 1.9.3. *Chiameremo* 0*–assemblaggio per* w *un insieme* $\mathfrak{A}$ *i cui elementi sono coppie non ordinate* $\{x^{-1}_{i,j,\mu}, x_{i,j',\mu'}\}$ *di lettere di* w*, tali che:*

(1) *se* $\{x^{-1}_{i,j,\mu}, x_{i,j',\mu'}\} \in \mathfrak{A}$ *allora* $j < j'$*;*

(2) *ogni lettera di* w *data da una intersezione di* $\Omega \cap \Gamma$ *compare in un elemento di* $\mathfrak{A}$*;*

(3) *ogni lettera di* w *con esponente negativo* ($e = -1$) *compare in un elemento di* $\mathfrak{A}$*;*

(4) *ogni lettera di* w *compare in al più un elemento di* $\mathfrak{A}$*.*

Data f ed un insieme di segmenti R per f, fissiamo V_∞ un intorno di ∞, con un diffeomorfismo $\Phi_\infty : V_\infty \to \mathbf{B}^2$ (essendo $\mathbf{B}^2$ la palla unitaria di $\mathbb{R}^2$) tale che:

(1) $\Gamma \cap V_\infty = \varnothing$;

(2) l'immagine di $R \cap V_\infty$ tramite Φ sia un insieme di semirette uscenti dall'origine;

e per ogni numero naturale $l \geq 1$ consideriamo la curva:

$$g_l : \mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbf{N}$$
$$g_l : t \longmapsto \Phi^{-1}_\infty\left(\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3l}\right)e^{it}\right)$$

sulla quale considereremo fissato il lato diretto verso l'esterno di V_∞.

Definizione 1.9.4. *Chiameremo β–espansione della k–curva con lato f, la $(k+\beta)$–curva con lato:*

$$f^\beta : \coprod_{h=1}^{k+\beta} \mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbf{N}$$

ottenuta aggiungendo ad f le curve $g_1, \ldots, g_\beta$.

Definizione 1.9.5. *Se w è una k–parola di f, chiameremo β–espansione di w la $(k+\beta)$–parola w^β determinata dalla β–espansione di f e dallo stesso insieme di segmenti che determina w.*

Osservazione 1.9.6. È evidente che $w^\beta = w' \cup \{u_1, \ldots, u_\beta\}$ dove w' è ottenuta da w aumentando di β il secondo indice di ogni lettera ed $u_1, \ldots, u_\beta$ sono le parole per le curve $g_1, \ldots, g_\beta$; è anche chiaro, per come sono state definite le curve g_l, che per ogni $l < l'$ si ha:

$$\begin{aligned} x_{i,j,\mu} \text{ compare in } u_l &\iff x_{i,j+l'-l,\mu} \text{ compare in } u_{l'} \\ x^{-1}_{i,j,\mu} \text{ compare in } u_l &\iff x^{-1}_{i,j+l-l',\mu} \text{ compare in } u_{l'} \end{aligned}$$

Definizione 1.9.7. *Chiameremo β–assemblaggio per w, uno 0–assemblaggio per la β–espansione di w.*

Definizione 1.9.8. *Se $\mathfrak{A}$ è un β–assemblaggio per la parola w, chiameremo grafo associato ad $\mathfrak{A}$, il $(k+\beta)$–grafo circolare pesato $G(\mathfrak{A})$ definito nel modo seguente:*

(1) *i vertici di $G(\mathfrak{A})$ sono le lettere della parola w^β che compaiono in qualche elemento di $\mathfrak{A}$;*
(2) *i vertici stanno su $k+\beta$ circonferenze orientate e disgiunte $C_1, \ldots, C_{k+\beta}$ che sono parte del grafo; ed il vertice $x^e_{i,j,\mu}$ sta su C_h se e solo se la lettera $x^e_{i,j,\mu}$ compare nella parola w^β_h;*
(3) *due vertici sono congiunti da un lato proprio se e solo se le corrispondenti lettere formano un elemento di $\mathfrak{A}$;*
(4) *un lato proprio ha peso $+$ [risp. $-$] se e solo se i suoi vertici hanno segno μ discorde [risp. concorde].*

Denoteremo con $\mathcal{A}^\beta(w)$ l'insieme dei β–assemblaggi di w.

Definizione 1.9.9. *Diremo che un assemblaggio è positivo se e solo se il suo grafo associato è positivo. Chiameremo inoltre genere e genere pesato del β–assemblaggio $\mathfrak{A}$ di w rispettivamente i numeri:*

$$g(\mathfrak{A}) = g\big(G(\mathfrak{A})\big); \qquad h(\mathfrak{A}) = h\big(G(\mathfrak{A})\big).$$

Chiameremo, inoltre numero di componenti connesse di $\mathfrak{A}$ il numero, $l(\mathfrak{A})$, di componenti connesse di $G(\mathfrak{A})$.

Denotiamo con $\mathfrak{S}_\beta$ il gruppo delle permutazioni di β elementi. Per quanto visto in Osservazione 1.9.6, è possibile definire un'azione del gruppo $\mathfrak{S}_\beta$ sull'insieme delle lettere di w^β e precisamente se $\sigma \in \mathfrak{S}_\beta$ poniamo:

$$\sigma x^e_{i,j,\mu} = \begin{cases} x^e_{i,j,\mu} & \text{se } x^e_{i,j,\mu} \text{ compare in } w' \\ x^e_{i,j+e(\sigma_l - l),\mu} & \text{se } x^e_{i,j,\mu} \text{ compare in } u_l \end{cases}$$

In altre parole questa azione lascia fisse le lettere di w' e manda ogni lettera della parola u_l nella corrispondente, secondo la corrispondenza data in Osservazione 1.9.6, lettera della parola u_{σ_l}.

Proposizione 1.9.10. *Sia $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}^\beta(w)$ allora l'insieme:*

$$\sigma\mathfrak{A} = \big\{\{\sigma x^{-1}_{i,j,\mu}, \sigma x_{i,j',\mu'}\} \;\big|\; \{x^{-1}_{i,j,\mu}, x_{i,j',\mu'}\} \in \mathfrak{A}\big\}$$

è ancora un β–assemblaggio per w.

Dim: Chiaramente l'insieme $\sigma\mathfrak{A}$ verifica le condizioni (2) e (3) di Definizione 1.9.3. Mostriamo che vale anche la (1). Abbiamo quattro casi possibili:

i) $x^{-1}_{i,j,\mu}$ ed $x_{i,j',\mu'}$ sono entrambe in w';
ii) $x^{-1}_{i,j,\mu}$ è in w' ed $x_{i,j',\mu'}$ è in u_l;
iii) $x^{-1}_{i,j,\mu}$ è in u_l ed $x_{i,j',\mu'}$ è in w';
iv) $x^{-1}_{i,j,\mu}$ ed $x_{i,j',\mu'}$ sono entrambe in w'.

Nel primo caso, visto che $\sigma x^{-1}_{i,j,\mu} = x^{-1}_{i,j,\mu}$ e $\sigma x_{i,j'}, \mu' = x_{i,j',\mu'}$, non c'è nulla da dimostrare. Negli altri tre casi la tesi segue dal fatto che le lettere di un segmento sono distribuite in tre blocchi: un primo, eventuale, costituito dalle lettere negative che stanno sulle parole u_l, un secondo dalle lettere della parola w' ed infine un ultimo gruppo costituito dalle lettere positive delle parole u_l. Pertanto se $x_{i,j,\mu}^{-1}$ sta in u_l allora per ogni lettera positiva $x_{i,j',\mu'}$ risulta $j < j'$, ed analogamente se $x_{i,j,\mu}$ sta in u_l allora per ogni lettera negativa $x_{i,j',\mu'}^{-1}$ risulta $j' < j$. $\blacksquare$

La precedente proposizione definisce una azione di $\mathfrak{S}_\beta$ sull'insieme $\mathcal{A}^\beta(w)$. È immediato dimostrare la seguente:

Proposizione 1.9.11. *Per ogni* $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}^\beta(w)$ *e per ogni* $\sigma \in \mathfrak{S}_\beta$ *risulta* $l(\sigma\mathfrak{A}) = l(\mathfrak{A})$, $g(\sigma\mathfrak{A}) = g(\mathfrak{A})$ *ed* $h(\sigma\mathfrak{A}) = h(\mathfrak{A})$.

Nella prossima sezione si dimostrerà la seguente:

Proposizione 1.9.12. *Siano* $f : \coprod_{h=1}^k \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ *una curva generica,* w *una parola definita da un sistema di segmenti per* f*; allora per ogni* $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}^\beta(w)$ *risulta:*

$$R_X(f) \geq 2l(\mathfrak{A}) - k - h(\mathfrak{A}) - \beta\chi(\mathbf{N}).$$

Dove X *è un fissato campo con un unico zero nel punto* ∞.

Si pone allora la seguente:

Definizione 1.9.13. *Sia* w *una* k*–parola definita a partire da un sistema di segmenti per la* k*–curva* $f : \coprod_{h=1}^k \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$. *Un* β*–assemblaggio* $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}^\beta(w)$ *sarà detto minimale se e solo se:*

$$R_X(f) = 2l(\mathfrak{A}) - k - h(\mathfrak{A}) - \beta\chi(\mathbf{N}).$$

Si denoterà con $\mathcal{A}_m^\beta(w)$ *l'insieme dei* β*–assemblaggi minimali di* w.

Da Proposizione 1.9.11 segue che il gruppo $\mathfrak{S}_\beta$ agisce su $\mathcal{A}_m^\beta(w)$. Denotiamo con $E^\beta(f) = \{F \mid F \text{ estende } f,\ \#F^{-1}(\infty) = \beta \text{ ed } F \text{ induce il lato di } f\}$. In §1.11 si dimostrerà il seguente:

Teorema 1.9.14. *Siano* $f : \coprod_{h=1}^k \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ *una curva con un lato fissato,* R *un sistema di segmenti per* f *e* w *la parola per* f *determinata da* R. *Allora l'insieme* $E^\beta(f)/_{\text{r-equivalenza}}$ *è in corrispondenza biunivoca con l'insieme* $\mathcal{A}_m^\beta(w)/_{\mathfrak{S}_\beta}$.

1.10. Tagli non orientati

Sia $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ una curva generica, e sia $R = A \cup C$ un sistema di segmenti per f. Per ogni segmento $r \in R$ sia U_r l'intorno di $r - U_\infty$ usato per definire la parola di f, quindi con una fissata orientazione. Evidentemente si può supporre che gli U_r siano tali che:

(1) $U_r \cap U_{r'} = \varnothing \quad \forall \quad r \neq r'$;

(2) $\forall r \quad U_r$ non contiene punti doppi di Γ;

(3) $\forall r \quad U_r$ contiene soltanto rami di Γ che intersecano r;

e di avere diffeomorfismi $\varphi_r : U_r \longrightarrow [0, t_r] \times [-1, 1]$, che conservano l'orientazione e tali che:

(4) $\forall r \quad \varphi_r(r) \subseteq [0, t_r] \times \{0\}$;

(5) se $\Gamma_{i,j}$ denota la componente di $\Gamma \cap U_r$ contenente il punto $x^e_{i,j,\mu}$ allora per ogni $\vartheta \in f^{-1}(\Gamma_{i,j}) \qquad \varphi_r(f(\vartheta)) = (j, \mu\vartheta + c)$ con c una costante opportuna;

(6) $\forall r \quad \varphi_r$ e $\varphi_{r|r} : r \to \mathbb{R}$ conservano l'orientazione.

Sia $x^e_{i,j,\mu}$ una lettera di w corrispondente ad un punto di $r \cap \Gamma$, chiamiamo:

$$\tilde{x}_{i,j,+} = \varphi_r^{-1}(j, \mu\tfrac{2}{3}),$$
$$\tilde{x}_{i,j,-} = \varphi_r^{-1}(j, -\mu\tfrac{2}{3})$$

e $\vartheta_{i,j,\pm}$ il punto tale che $f(\vartheta_{i,j,\pm}) = \tilde{x}_{i,j,\pm}$. Quindi il punto $\tilde{x}_{i,j,+}$ è percorso dopo $x^e_{i,j,\mu}$ mentre $\tilde{x}_{i,j,-}$ è percorso prima (vedi Fig. 23).

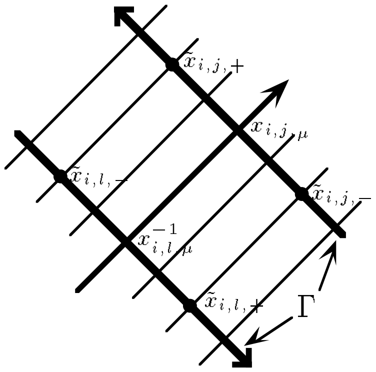


Fig. 23

Infine, data una curva $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ [rispettivamente $f : [a, b] \to \mathbf{N}$] denotiamo con $-f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ [risp. $-f : [a, b] \to \mathbf{N}$] la curva tale che $-f(\vartheta) = f(-\vartheta)$ [risp. $-f(t) = f(b + a - t)$], e per ogni $j > j'$ siano $\lambda_{j,j'}$ e $\widetilde{\lambda}_{j,j'}$ curve come in §1.5.

Con le notazioni introdotte in §1.5, si danno le seguenti definizioni:

Definizione 1.10.1. *Siano $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ una 1–curva generica, w una parola per f, $x^{-1}_{i,j,\mu}$ e $x_{i,j',-\mu}$ lettere in w con $j < j'$, appartenenti al segmento r. Chiamiamo* *taglio di primo tipo positivo di* f *lungo* $\{x^{-1}_{i,j,\mu}, x_{i,j',-\mu}\}$ *la curva* $f^*_+ = \{f^*_{+1}, f^*_{+2}\}$, $f^*_+ : \mathbf{S}^1 \coprod \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ *definita da:*

$$f^*_{+,1} = \begin{cases} f\big|_{[\vartheta_{i,j',+},\vartheta_{i,j,-}]}\big(\varphi_r^{-1} \circ (-\widetilde{\lambda}_{j,j'})\big) & \textit{se } \mu = + \\ f\big|_{[\vartheta_{i,j',+},\vartheta_{i,j,-}]}(\varphi_r^{-1} \circ \lambda_{j,j'}) & \textit{se } \mu = - \end{cases}$$
$$f^*_{+,2} = \begin{cases} f\big|_{[\vartheta_{i,j,+},\vartheta_{i,j',-}]}\big(\varphi_r^{-1} \circ (-\lambda_{j,j'})\big) & \textit{se } \mu = + \\ f\big|_{[\vartheta_{i,j,+},\vartheta_{i,j',-}]}(\varphi_r^{-1} \circ \widetilde{\lambda}_{j,j'}) & \textit{se } \mu = - \end{cases}$$

Definizione 1.10.2. *Siano* $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ *una 1–curva generica,* w *una parola per* f, $x^{-1}_{i,j,\mu}$ *ed* $x_{i,j',\mu}$ *lettere in* w *con* $j < j'$*, appartenenti al segmento* r*. Chiamiamo taglio di primo tipo negativo di* f *lungo* $\{x^{-1}_{i,j,\mu}, x_{i,j',\mu}\}$ *la 1–curva* $f^*_- : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ *definita da:*

$$f^*_- = \begin{cases} (\varphi_r^{-1} \circ \lambda_{j,j'})\Big[-\big(f\big|_{[\vartheta_{i,j,+},\vartheta_{i,j',-}]}\big)\Big]\big(\varphi_r^{-1} \circ (-\widetilde{\lambda}_{j,j'})\big)f\big|_{[\vartheta_{i,j',+},\vartheta_{i,j,-}]} & \textit{se } \mu = + \\ \big(\varphi_r^{-1} \circ (-\widetilde{\lambda}_{j,j'})\big)\Big[-\big(f\big|_{[\vartheta_{i,j,+},\vartheta_{i,j',-}]}\big)\Big](\varphi_r^{-1} \circ \lambda_{j,j'})f\big|_{[\vartheta_{i,j',+},\vartheta_{i,j,-}]} & \textit{se } \mu = - \end{cases}$$

Definizione 1.10.3. *Siano* $f : \coprod_{h=1}^k \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ *una* k*–curva generica e* w *una sua parola; siano* $x^{-1}_{i,j,\mu}$, $x_{i,j',-\mu}$ *lettere in* w *con* $j < j'$*, appartenenti a due diverse 1–parole* w_h, w_l *ed al segmento* r*. Chiamiamo taglio di secondo tipo di* f *lungo* $\{x^{-1}_{i,j,\mu}, x_{i,j',-\mu}\}$ *la curva* $f^{**} : \big(\coprod_{i\neq h,l} \mathbf{S}^1\big) \amalg \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ *definita da:*

$$f^{**}_i = f_i \qquad \forall i \neq h, l$$
$$f^{**}|_{\mathbf{S}^1} = \begin{cases} \big(\varphi_r^{-1} \circ (-\widetilde{\lambda}_{j,j'})\big)f|_{[\vartheta_{i,j,+},\vartheta_{i,j,-}]}\big(\varphi_r^{-1} \circ (-\lambda_{j,j'})\big)f|_{[\vartheta_{i,j',+},\vartheta_{i,j',-}]} & \textit{se } \mu = + \\ (\varphi_r^{-1} \circ \lambda_{j,j'})f|_{[\vartheta_{i,j,+},\vartheta_{i,j,-}]}(\varphi_r^{-1} \circ \widetilde{\lambda}_{j,j'})f|_{[\vartheta_{i,j',+},\vartheta_{i,j',-}]} & \textit{se } \mu = - \end{cases}$$

Osservazione 1.10.4. Sia $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ una curva generica e sia w una 1–parola per f. Supponiamo che $\{x^{-1}_{i,j,\mu}, x_{i,j',-\mu}\}$ e $\{x^{-1}_{h,k,\mu'}, x_{h,k',-\mu'}\}$ siano due coppie positive di lettere di w con $j < j'$ e $k < k'$, e supponiamo che siano allacciate —nel senso della definizione del paragrafo precedente— allora, effettuando un taglio di primo tipo positivo lungo una delle due coppie, la rimanente coppia, sarà ancora positiva, ma si troverà ad avere i vertici su due differenti componenti di Γ^*_+, possiamo allora effettuare un taglio di secondo tipo lungo quest'altra coppia, ottenendo in tal modo una 1–curva (come quella di partenza). Non è difficile vedere che il risultato non dipende dall'ordine con cui si sono effettuati i due tagli.

Poniamo pertanto la seguente:

Definizione 1.10.5. *Sia $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ una 1–curva generica e siano:*

$$\{x^{-1}_{i,j,\mu}, x_{i,j',-\mu}\} \qquad \{x^{-1}_{h,k,\mu'}, x_{h,k',-\mu'}\}$$

due coppie allacciate e positive. Chiameremo doppio taglio di f lungo queste due coppie la 1–curva:

$$f^{***} = \left(f^*_+\right)^{**} : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N},$$

dove i due tagli sono fatti lungo le due coppie in questione.

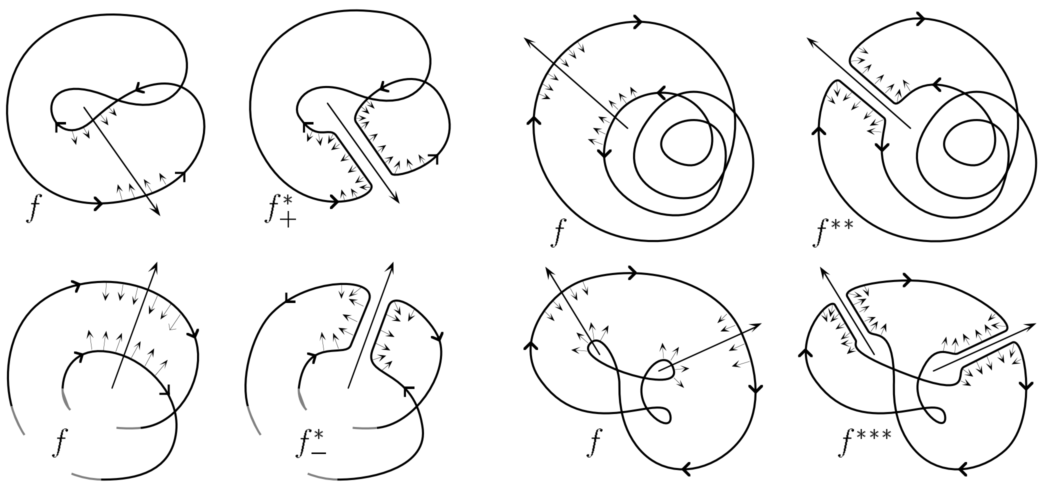


Fig. 24

Una breve riflessione mostra che, le scelte fatte per definire i tagli, garantiscono che tagliando una curva generica di classe C^∞, in uno dei modi sopra descritti, si ottiene ancora una curva generica di classe C^∞. In Fig. 24 sono illustrati i vari tipi di taglio.

Proposizione 1.10.6. *Se la curva $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ ha due lati, allora anche ogni curva ottenuta tagliando f, in uno dei modi descritti, ha due lati.*

DIM: Se n é un lato per f, ossia un campo trasverale ad f questo continua a definire un lato sulla parte "vecchia" della curva tagliata. Il fatto che si tagli sempre lungo una coppia di lettere con esponenti (e) opposti, garantisce che tale campo può essere prolungato in modo sostanzialmente unico lungo le parti del tipo $\varphi_r^{-1} \circ \lambda_{j,j'}$ (vedi Fig. 24). ∎

Definizione 1.10.7. *Sia $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ una curva generica con un lato fissato, e sia $f^{\#}$ ottenuta da f con uno dei tagli sopra definiti, chiameremo lato indotto su $f^{\#}$ da f il lato che coincide con il lato fissato di f sulla parte di curva non modificata dal taglio stesso.*

D'ora in poi, quando parleremo di taglio di una curva munita di un lato, considereremo sempre la curva ottenuta munita del taglio indotto. Supporremo inoltre di avere fissato, una volta per tutte, un campo X sulla superficie S con un unico zero nel fissato punto ∞.

Proposizione 1.10.8. *Con le notazioni sopra introdotte, risulta:*

$$i)\quad R_X(f^*_+) = R_X(f) + 1; \qquad iii)\quad R_X(f^{**}) = R_X(f) + 1;$$

$$ii)\quad R_X(f^*_-) = R_X(f) + 1; \qquad iv)\quad R_X(f^{***}) = R_X(f) + 2.$$

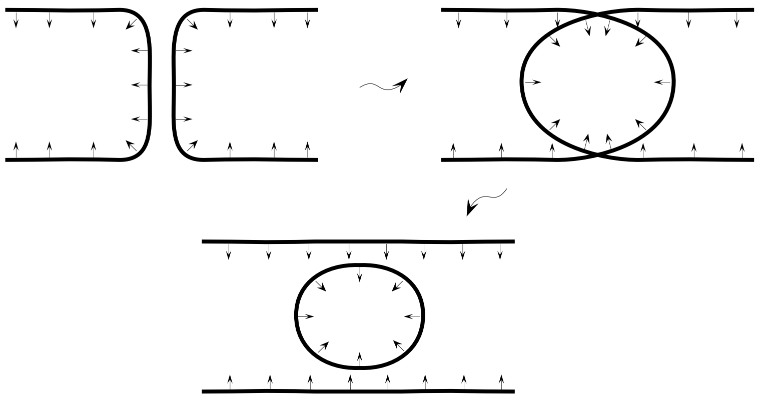


Fig. 25

Dim: Si modifichi la curva tagliata nel modo suggerito da Fig. 26 e si applichino le Proposizioni 1.7.22, 1.7.23 e 1.7.18. ∎

Enunciamo ora delle proposizioni che si dimostrano in modo del tutto simile alle loro analoghe di §1.5 e che mettono in relazione tagli ed assemblaggi.

Sia R un sistema di segmenti per f che definisce la parola w, e sia $f^{\#}$ uno qualsiasi dei tagli appena definiti. Analogamente a quanto visto in §1.5, anche in questo caso R è un insieme di segmenti per $f^{\#}$ che, in generale, non è più un sistema di segmenti per $f^{\#}$.

Sia $\{x^{-1}_{i,j,\mu}, x^{-1}_{i,j',\mu'}\}$ la coppia lungo cui si taglia (in caso di taglio doppio, denotiamo con $\{x^{-1}_{h,k,\mu}, x^{-1}_{h,k',\mu'}\}$ l'altra coppia coinvolta nel taglio) e siano $j = j_1 < \cdots < j_{p+1} = j'$ gli indici tali che i punti $x^e_{i,j_t,\mu}$ siano tutte e sole le intersezioni di $r_i \cap \Gamma$ comprese tra $x^{-1}_{i,j,\mu}$ ed $x^{-1}_{i,j',\mu'}$ (in caso di taglio doppio siano $k = k_1 < \cdots < k_{q+1} = k'$ gli analoghi per l'altra coppia).

Con la stessa tecnica usata in §1.5, si possono aggiungere segmenti $\beta_1, \ldots \beta_p$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ e $\delta_1, \ldots, \delta_{p-2}$ nell'intorno U_{r_i} di r_i (in caso di taglio doppio anche segmenti $\widetilde{\beta}_1, \ldots \widetilde{\beta}_q$, $\widetilde{\gamma}_1, \ldots, \widetilde{\gamma}_q$ e $\widetilde{\delta}_1, \ldots, \widetilde{\delta}_{q-2}$ nell'intorno U_{r_h} di r_h), ottenendo in tal modo un sistema di segmenti $R^\#$ per $f^\#$, che chiameremo il sistema di segmenti indotto dal taglio (cfr. Fig. 10 di pag. 14).

Conveniamo di chiamare $y^e_{s,t,\mu}$, $z^e_{s,t,\mu}$ ed $u^e_{s,t,\mu}$ le intersezioni di $f^\#$ con i segmenti β_s, γ_s e δ_s rispettivamente ed in caso di taglio dopio $\widetilde{y}^e_{s,t,\mu}$, $\widetilde{z}^e_{s,t,\mu}$ ed $\widetilde{u}^e_{s,t,\mu}$ quelle con i segmenti $\widetilde{\beta}_s$, $\widetilde{\gamma}_s$ e $\widetilde{\delta}_s$.

Denotiamo infine con w'_+, w'_-, w'' e w''' le parole determinate da R rispettivamente per f^*_+, f^*_-, f^{**} ed f^{***} e con w^*_+, w^*_-, w^{**} ed w^{***} quelle determinate dal sistema di segmenti indotto.

Proposizione 1.10.9. *Per un taglio di primo tipo positivo, se* $w = x^{-1}_{i,j,\mu}\xi x_{i,j',-\mu}\eta$ *è, come si può supporre, la parola di* f*, allora:* $w'_+ = \{w'_{+,1}, w'_{+,2}\}$ *con*

$$w'_{+,1} = \eta, \qquad w'_{+,2} = \xi;$$

e $w^*_+ = \{w^*_{+,1}, w^*_{+,2}\}$*, dove* $w^*_{+,1}$ *e* $w^*_{+,2}$ *sono ottenute rispettivamente dalle parole:*

$$\widetilde{w}'_{+,1} = \begin{cases} z_{1,1,+1} \cdots z_{p,1,+1}\eta & \text{se } \mu = -1, \\ y_{1,1,-1} \cdots y_{p,1,-1}\eta & \text{se } \mu = 1, \end{cases}$$
$$\widetilde{w}'_{+,2} = \begin{cases} y_{p,1,+1} \cdots y_{1,1,+1}\xi & \text{se } \mu = -1, \\ z_{p,1,-1} \cdots z_{1,1,-1}\xi & \text{se } \mu = 1, \end{cases}$$

sostituendo ogni lettera $x^e_{i,l,\nu}$ *con il blocco di lettere:*

$$y^e_{p,l,+1} \cdots y^e_{1,l,+1} x^e_{i,l,+1} u^e_{p-2,l,+1} \cdots u^e_{1,l,+1} z^e_{1,l,+1} \cdots z^e_{p,l,+1} \qquad \text{se } \nu = 1,$$
$$z^e_{p,l,-1} \cdots z^e_{1,l,-1} u^e_{1,l,-1} \cdots u^e_{p-2,l,-1} x^e_{i,l,-1} y^e_{1,l,-1} \cdots y^e_{p,l,-1} \qquad \text{se } \nu = -1,$$

con la convenzione che le lettere $y^e_{s,l,\nu}$ *e* $z^e_{s,l,\nu}$ *compaiono se e solo se* $j_s < l$*, mentre la lettera* $u^e_{s,l,\nu}$ *compare se e solo se* $j_{s+1} > l$*.*

Proposizione 1.10.10. *Per un taglio di primo tipo negativo, se* $w = x^{-1}_{i,j,\mu}\xi x_{i,j',\mu}\eta$ *è, come si può supporre, la parola di* f*, allora:*

$$w'_- = \overline{\xi}\eta,$$

dove $\overline{\xi}$ *è ottenuta da* ξ *invertendo l'ordine delle lettere ed invertendo i segni* μ*; invece,* w^*_- *è ottenuta dalla parola:*

$$\widetilde{w}'_- = \begin{cases} y_{1,1,-1}\cdots y_{p,1,-1}\eta z_{1,1,+1}\cdots z_{p,1,+1}\overline{\xi} & \text{se } \mu = -1, \\ z_{1,1,+1}\cdots z_{p,1,+1}\eta y_{1,1,-1}\cdots y_{p,1,-1}\overline{\xi} & \text{se } \mu = +1, \end{cases}$$

con le stesse sostituzioni della proposizione precedente.

Proposizione 1.10.11. *Per un taglio di secondo tipo, se* $w = x^{-1}_{i,j,\mu}\xi$ *e* $w_l = x_{i,j',-\mu}\eta$ *sono, come si può supporre, le due parole delle due componenti di* f *coinvolte nel taglio, allora* $w'' = \{w_i\}_{i\neq h,l} \cup \{w''_{h,l}\}$ *dove:*

$$w''_{h,l} = \xi\eta;$$

e $w^{**} = \{w^{**}_i\}_{i\neq h,l} \cup \{w^{**}_{h,l}\}$ *è ottenuta dalla parola* $\widetilde{w}'' = \{w_i\}_{i\neq h,l} \cup \{w''_{h,l}\}$*, essendo:*

$$\widetilde{w}''_{h,l} = \begin{cases} y_{p,1,+1}\cdots y_{1,1,+1}\xi z_{1,1,+1}\cdots z_{p,1,+1}\eta & \text{se } \mu = -1, \\ z_{p,1,-1}\cdots z_{1,1,-1}\xi y_{1,1,-1}\cdots y_{p,1,-1}\eta & \text{se } \mu = +1, \end{cases}$$

con le stesse sostituzioni delle proposizioni precedenti.

Proposizione 1.10.12. *Per un taglio doppio, se:*

$$w = x^{-1}_{i,j,\mu}\xi x^{-1}_{h,k,\mu'}\eta x_{i,j',-\mu}\zeta x_{h,k',-\mu'}\vartheta$$

è, come si può supporre, la parola di f*, allora:*

$$w''' = \vartheta\zeta\eta\xi,$$

e w^{***} è ottenuta dalla parola:

$$\widetilde{w}''' = \begin{cases} \widetilde{y}_{1,1,-1}\cdots\widetilde{y}_{q,1,-1}\vartheta y_{1,1,-1}\cdots y_{p,1,-1}\zeta\widetilde{z}_{q,1,-1}\cdots\widetilde{z}_{1,1,-1}\eta z_{p,1,-1}\cdots z_{1,1,-1}\xi \\ \qquad\qquad \text{se } \mu=+1 \text{ e } \mu'=+1, \\ \widetilde{z}_{1,1,+1}\cdots\widetilde{z}_{p,1,+1}\vartheta y_{1,1,-1}\cdots y_{p,1,-1}\zeta\widetilde{y}_{q,1,+1}\cdots\widetilde{y}_{1,1,+1}\eta z_{p,1,-1}\cdots z_{1,1,-1}\xi \\ \qquad\qquad \text{se } \mu=+1 \text{ e } \mu'=-1, \\ \widetilde{y}_{1,1,-1}\cdots\widetilde{y}_{q,1,-1}\vartheta z_{1,1,+1}\cdots z_{p,1,+1}\zeta\widetilde{z}_{q,1,-1}\cdots\widetilde{z}_{1,1,-1}\eta y_{p,1,+1}\cdots y_{1,1,+1}\xi \\ \qquad\qquad \text{se } \mu=-1 \text{ e } \mu'=+1, \\ \widetilde{z}_{1,1,+1}\cdots\widetilde{z}_{p,1,+1}\vartheta z_{1,1,+1}\cdots z_{p,1,+1}\zeta\widetilde{y}_{q,1,+1}\cdots\widetilde{y}_{1,1,+1}\eta y_{p,1,+1}\cdots y_{1,1,+1}\xi \\ \qquad\qquad \text{se } \mu=-1 \text{ e } \mu'=-1, \end{cases}$$

con le stesse sostituzioni delle proposizioni precedenti e le analoghe per le lettere $x^{e}_{h,l,\nu}$.

Da Proposizione 1.10.9 segue allora immediatamente:

Proposizione 1.10.13. *Siano $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ una curva generica, R un sistema di segmenti per f e w la parola determinata da R. Sia $\{x^{-1}_{i,j,\mu}, x_{i,j',-\mu}\}$ una coppia di lettere con $j < j'$ ed $x^{-1}_{i,j,\mu}$ terminale (cfr. Definizione 1.5.8). Allora le parole $w^*_{+,1}$ e $w^*_{+,2}$, indotte dal taglio di primo tipo positivo di f, hanno entrambe un numero di lettere negative strettamente inferiore a quello di w.*

Supponiamo ora di avere uno 0–assemblaggio $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}^0(w)$ e di effettuare un taglio lungo una o due coppie di $\mathfrak{A}$. In modo del tutto analogo a quanto fatto in §1.5, si possono definire gli assemblaggi $\mathfrak{A}^*_{+,1} \in \mathcal{A}^0(w^*_{+,1})$, $\mathfrak{A}^*_{+,2} \in \mathcal{A}^0(w^*_{+,2})$, $\mathfrak{A}^*_{-} \in \mathcal{A}^0(w^*_{-})$, $\mathfrak{A}^{**} \in \mathcal{A}^0(w^{**})$ ed $\mathfrak{A}^{***} \in \mathcal{A}^0(w^{***})$ indotti dal taglio, per i quali valgono le seguenti proposizioni:

Proposizione 1.10.14. *Se $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}^0(w)$ è un assemblaggio connesso di genere zero, allora $\mathfrak{A}^*_{+,1} \in \mathcal{A}^0(w^*_{+,1})$ e $\mathfrak{A}^*_{+,2} \in \mathcal{A}^0(w^*_{+,2})$ sono assemblaggi connessi di genere zero.*

Proposizione 1.10.15. *Se $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}^0(w)$ è un assemblaggio connesso di genere pesato h allora $\mathfrak{A}^*_{-} \in \mathcal{A}^0(w^*_{-})$ è un assemblaggio connesso di genere pesato $h-1$.*

Proposizione 1.10.16. *Se $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}^0(w)$ è un assemblaggio connesso di genere g, allora $\mathfrak{A}^{**} \in \mathcal{A}^0(w^{**})$ è un assemblaggio connesso di genere g.*

Proposizione 1.10.17. *Se $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}^0(w)$ è un assemblaggio connesso e positivo di* *genere g allora $\mathfrak{A}^{***} \in \mathcal{A}^0(w^{***})$ è un assemblaggio connesso e positivo di genere $g-1$.*

La dimostrazione di queste proposizioni è identica alla dimostrazione delle Proposizioni 1.5.11, 1.5.12 e 1.5.13 di §1.5, e si basa sull'osservazione che in ognuno dei quattro casi, detto $\mathfrak{A}'$ l'assemblaggio della parola per $f^{\#}$ determinata da R indotto dal taglio, il grafo $G(\mathfrak{A}')$, associato ad $\mathfrak{A}'$, non è altro che il grafo ottenuto tagliando $G(\mathfrak{A})$ nel modo corrispondente al taglio effettuato su f, e $G(\mathfrak{A}^{\#})$ è ottenuto da $G(\mathfrak{A}')$ aggiungendogli dei lati paralleli a lati già esistenti. La tesi segue allora usando le Proposizioni 1.8.21, 1.8.22, 1.8.23 e 1.8.24.

Analogamente a quanto fatto in §1.5, da queste proposizioni segue allora:

Proposizione 1.10.18. *Siano $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ una curva con un lato, R un sistema di segmenti per f, w la parola determinata da R ed $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}^0(w)$. Allora:*

$$R_X(f) \geq 2\mathfrak{A} - k - h(\mathfrak{A}).$$

DIM: La dimostrazione è completamente analoga a quella di Proposizione 1.5.17, ossia si procede per induzione dimostrando successivamente:

i) data $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ ed $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}^0(w)$ tale che $g(\mathfrak{A}) = 0$ allora $R_x(f) \geq 1$;
ii) data $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ ed $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}^0(w)$ positivo allora $R_x(f) \geq 1 - 2g(\mathfrak{A})$;
iii) data $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ ed $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}^0(w)$ negativo allora $R_x(f) \geq 1 - h(\mathfrak{A})$;
iv) data $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ ed $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}^0(w)$ connesso allora $R_x(f) \geq 2 - k - h(\mathfrak{A})$;

ed infine il caso generale. L'unica sostanziale differenza è nella dimostrazione del primo passo (cfr. Lemma 1.5.14). Anche in questo caso si procede per induzione sul numero N di lettere negative di w. Se $N = 0$, allora la curva non interseca i segmenti di Ω, in quanto, se così fosse w conterrebbe almeno una lettera positiva che sta su un segmento di Ω. Ma allora, per la condizione (3) della definizione di assemblaggio (Definizione 1.9.3), necessariamente w dovrebbe contenere anche una lettera negativa che sta sullo stesso segmento.

Osservando allora che $\mathbf{N} - \Omega$ è diffeomorfo ad un disco aperto, la dimostrazione si conclude esattamente con le stesse argomentazioni della dimostrazione di Lemma 1.5.14. ❏

Osservazione 1.10.19. Sia $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ una k–curva generica, e sia R un sistema di segmenti per f che definisce la k–parola w. Osserviamo che se β è un intero maggiore o uguale ad 1, allora R è un insieme di segmenti per f^β, ma non è un sistema di segmenti, dato che nell'intorno di ∞ si generano esattamente β nuove componenti connesse.

Ma, per come è stato scelto il lato sulle g_l (cfr. Definizione 1.9.4), si possono scegliere nuovi segmenti uscenti da tali componenti che intersecano soltanto le curve g_l e che abbiano soltanto intersezioni positive (vedi Fig. 26). Per come sono definiti gli assemblaggi, è allora evidente che gli 0–assemblaggi della parola definita dal sistema di segmenti ottenuto aggiungendo dei siffatti segmenti, sono tutti e soli gli 0–assemblaggi della β–espansione w^β di w.

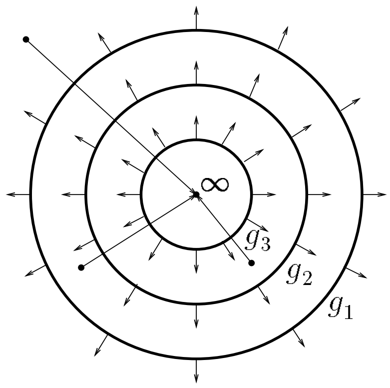


Fig. 26

Saldiamo ora il debito con §1.9 dimostrando la seguente:

Proposizione 1.10.20. *Siano $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ una curva generica, R un sistema di segmenti per f e w la parola per f definita da R. Allora per ogni β–assemblaggio $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}^\beta(w)$ risulta:*

$$R_X(f) \geq 2l(\mathfrak{A}) - k - h(\mathfrak{A}) - \beta\chi(\mathbf{N}).$$

DIM: Da Proposizione 1.7.14 ed Osservazione 1.7.19 segue oviamente che:

$$R_X(f^\beta) = R_X(f) - \beta + \beta\chi(\mathbf{N}).$$

D'altra parte, per l'osservazione precedente, allo 0–assemblaggio $\mathfrak{A}$ per la parola w^β della $(k+\beta)$–curva f^β si può applicare la Proposizione 1.10.18, e pertanto si ha:

$$R_X(f) - \beta + \beta\chi(\mathbf{N}) = R_X(f^\beta) \geq 2l(\mathfrak{A}) - (k+\beta) - h(\mathfrak{A}),$$

da cui si ottiene immediatamente la tesi. ∎

1.11. Dimostrazione di Teorema 1.9.14

Dimostriamo innanzitutto il teorema nel caso degli 0–assemblaggi, ovvero dimostriamo il seguente:

Teorema 1.11.1. *L'insieme $E^0(f)/_{\text{r-equivalenza}}$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme $A^0_m(w)$.*

Dim: Incominciamo definendo un'applicazione:

$$\mathfrak{A} : E^0(f)/_{\text{r-equivalenza}} \longrightarrow \mathcal{A}^0_m(w). \tag{A}$$

Siano S una superficie compatta con bordo $\partial S = \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1$ ed $F : S \to \mathbf{N}$ una immersione che estende $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$. Analogamente a quanto visto in §1.6, $F^{-1}(R)$ è costituito da una unione di archi lisci disgiunti. Dotando tali archi dell'orientazione indotta dai segmenti r_i, è immediato verificare che la controimmagine di punti positivi di $R \cap \Gamma$ è costituita di punti su cui termina qualche arco, mentre la controimmagine di punti negativi è costituita di punti da cui esce qualche arco. Infine, dalla condizione che $F^{-1}(\infty) = \varnothing$, segue che ogni arco termina necessariamente su ∂S.

Chiamato $\widetilde{G}_R(F)$ l'insieme di questi archi che partono da ∂S; accoppiando le lettere corrispondenti agli estremi degli archi di $\widetilde{G}_R(F)$, si ottiene un insieme di coppie di lettere di w che chiamiamo $\mathfrak{A}(F)$. Denoteremo inoltre con $G_R(F) = \partial S \cup \widetilde{G}_R(F)$. In entrambi i casi ometteremo il sottoindice R, quando non ci sarà ambiguità sull'insieme di segmenti che si sta usando.

Lemma 1.11.2. *L'insieme $\mathfrak{A}(F)$ è un assemblaggio di w.*

Dim: Evidentemente ogni lettera negativa è accoppiata ad una positiva, con indice j maggiore. L'unica cosa non immediatamente evidente è il fatto che ogni lettera corrispondente a punti di Ω sia accoppiata con una qualche altra lettera. Questo però segue con un ragionamento di simmetria. Nel senso che invertendo l'orientazione del segmento ω_i, i punti positivi diventano punti negativi e viceversa. Si può usare il fatto che ogni lettera negativa è accoppiata ad una positiva per concludere. ∎

Lemma 1.11.3. *F ristretta ad ogni componente connessa di $\mathbf{N} - \widetilde{G}(F)$ è iniettiva.*

DIM: Osserviamo che nella dimostrazione dell'analogo lemma nel caso piano (cfr. Lemma 1.6.2), si è usato il fatto che l'immagine di F fosse in $\mathbb{R}^2$ soltanto per dire che ogni componente connessa di $\mathbb{R}^2 - (\Gamma \cup A)$ è diffeomorfa ad un disco aperto, ma dato che Ω è un insieme di generatori per $\pi_1(\mathbf{N})$ questo è evidentemente vero anche per $\mathbf{N} - (\Gamma \cup R)$; in altre parole si può ripetere la stessa dimostrazione di Lemma 1.6.2 anche in questo caso. ∎

Lemma 1.11.4. *Ogni componente connessa di $S - G(F)$ è diffeomorfa ad un disco aperto.*

DIM: Dato che $\mathbf{N} - \Omega$ è diffeomorfo ad un disco aperto, dal lemma precedente segue che ogni componente connessa di $S - G(F)$ è una superficie planare. La tesi segue allora con lo stesso ragionamento usato nella dimostrazione del Lemma 1.6.3. ∎

Lemma 1.11.5. *L'assemblaggio indotto da F è minimale.*

DIM: Evidentemente $G(F)$ è una realizzazione del grafo associato ad $\mathfrak{A}(F)$ e l'inclusione di $G(F)$ in S è una immersione di tale grafo nel senso di Definizione 1.8.4. Ragionando come in §1.6 e tenendo presente Proposizione 1.7.21, si ha:

$$R_X(f) = \chi(S) \leq 2l(\mathfrak{A}) - k - h(\mathfrak{A}).$$

D'altra parte, dato che $\mathfrak{A}(F)$ è un assemblaggio, da Proposizione 1.10.20 segue la disuguaglianza inversa e quindi la tesi. ∎

Evidentemente vale anche il seguente:

Lemma 1.11.6. *Se $F, F' \in E^0(f)$ sono r–equivalenti, allora $\mathfrak{A}(F) = \mathfrak{A}(F')$.*

Fino a questo punto, abbiamo definito un'applicazione come in (A). Dimostriamo che tale applicazione è biunivoca.

L'iniettività segue dal Lemma 1.11.3 esattamente come in §1.6, ed anche per quanto riguarda la surgettività, il modo di procedere non è dissimile da quello usato nella dimostrazione del Teorema 1.4.3, ossia si dimostrano induttivamente le seguenti:

i) sia $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ tale che $R_X(f) = 1$ e sia $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}^0_m(w)$. Allora esiste $F \in E^0(f)$ tale che $\mathfrak{A}(F) = \mathfrak{A}$;

ii) sia $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ *e sia* $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}^0_m(w)$ *un assemblaggio positivo. Allora esiste* $F \in E^0(f)$ *tale che* $\mathfrak{A}(F) = \mathfrak{A}$*;*

iii) sia $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ *e sia* $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}^0_m(w)$*. Allora esiste* $F \in E^0(f)$ *tale che* $\mathfrak{A}(F) = \mathfrak{A}$*;*

iv) sia $f : \coprod_{h=1}^k \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ *e sia* $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}^0_m(w)$ *un assemblaggio connesso. Allora esiste* $F \in E^0(f)$ *tale che* $\mathfrak{A}(F) = \mathfrak{A}$*;*

e quindi il caso generale. L'unico punto la cui dimostrazione presenta delle variazioni degne di nota è il *iv)* di cui ora vediamo la dimostrazione.

Premettiamo una importante osservazione:

Osservazione 1.11.7. Se si inverte l'orientazione della componente h–esima della k–curva $f : \coprod_{h=1}^k \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$, la k–parola di f cambia nel seguente modo:

> Si inverte l'ordine della parola w_h e si invertono tutti i segni ausiliari μ, delle lettere di w_h.

Evidentemente, detta w' la k–parola così ottenuta, c'e una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{A}^0(w)$ e $\mathcal{A}^0(w')$, definita associando all'assemblaggio $\mathfrak{A}$ l'assemblaggio $\mathfrak{A}'$ ottenuto da $\mathfrak{A}$ semplicemente cambiando il segno ausiliario μ alle lettere che provengono da w_h.

Non è difficile vedere che allora i grafi $G(\mathfrak{A})$ e $G(\mathfrak{A}')$ associati ad $\mathfrak{A}$ ed $\mathfrak{A}'$ sono ottenuti l'uno dall'altro con una mossa di tipo (E) (cfr. §1.8) e quindi hanno stessi numeri caratteristici (genere, genere pesato e numero di componenti).

Osserviamo infine che se $F \in E^0(f)$ ed $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ sono gli assemblaggi indotti rispettivamente per la parola w e per la parola w', con la notazione introdotta sopra, risulta evidentemente $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}'$.

Dimostriamo ora il punto *iv)*. Si procede per induzione sul numero k di componenti della curva. Se $k = 1$ la tesi è data da *iii)*. Sia $k > 1$ e sia $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}^0_m(w)$ un assemblaggio connesso, allora esiste una coppia $\{x^{-1}_{i,j,\mu}, x_{i,j,\nu}\} \in \mathfrak{A}$ con $x^{-1}_{i,j,\mu}$ nella 1–parola w_1 ed $x_{i,j,\nu}$ in w_2 ($\mathfrak{A}$ è connesso).

A meno di cambiare l'orientazione di una delle due componenti, cosa che, in virtù dell'osservazione precedente, non inficia la dimostrazione, possiamo supporre che

$\mu = \nu$. Ma a questo punto, con un taglio di secondo tipo di f ci si riconduce ad una curva con $k-1$ componenti, e si conclude la dimostrazione, come in Teorema 1.6.13, usando la Proposizione 1.10.16.

Con questo concludiamo la dimostrazione di Teorema 1.11.1 ∎

Affrontiamo ora il caso generale. Definiamo innanzitutto un'applicazione:

$$\mathfrak{A}^\beta : E^\beta(f)/_{\text{r-equivalenza}} \longrightarrow \mathcal{A}^\beta_m(w)/_{\mathfrak{S}_\beta}$$

Sia $F \in E^\beta(f)$, $F : S \to \mathbf{N}$ e siano $\{p_1, \ldots, p_\beta\} = F^{-1}(\infty)$. Siano $D_1, \ldots, D_\beta \subset \mathbf{N}$ i dischi che contengono il punto ∞ e che bordano le curve $g_1, \ldots, g_\beta$ che danno la β-espansione di f (cfr. Definizione 1.9.4). Dato che i D_i sono contenuti interamente nella componente connessa di $\mathbf{N} - \Gamma$ contenente ∞, l'immagine inversa di ciascuno di essi è costituita da una unione disgiunta di β dischi. Denotiamo con D_i^j la componente di $F^{-1}(D_i)$ che contiene il punto p_j e con U_i^j la sua parte interna.

Data una permutazione $\sigma \in \mathfrak{S}_\beta$ consideriamo la superficie S_σ ottenuta da S rimuovendo i dischi aperti $U_i^{\sigma i}$. Evidentemente S_σ è una superficie con $k+\beta$ componenti di bordo ed $F_\sigma = F|_{S_\sigma}$ è evidentemente una estensione di f^β tale che $F_\sigma^{-1}(\infty) = \emptyset$.

In virù dell'Osservazione 1.10.19 possiamo allora applicare il Teorema 1.11.1 e trovare un unico assemblaggio $\mathfrak{A}(F_\sigma) \in \mathcal{A}_m(w^\beta)$ indotto da F_σ, che classifica F_σ a meno di equivalenza destra. Visto che dalle definizione segue evidentemente che $\mathcal{A}_m(w^\beta) = \mathcal{A}^\beta_m(w)$, abbiamo definito una applicazione:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^\beta_1 &: E^\beta(f) \times \mathfrak{S}_\beta \longrightarrow \mathcal{A}^\beta_m(w) \\ \mathfrak{A}^\beta_1 &: (F, \sigma) \longmapsto \mathfrak{A}(F_\sigma). \end{aligned} \tag{1}$$

Proposizione 1.11.8. *Per ogni $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_\beta$ risulta:*

$$\mathfrak{A}^\beta_1(F, \sigma') = (\sigma'\sigma^{-1})\mathfrak{A}^\beta_1(F, \sigma).$$

DIM: Segue immediatamente da come si è costruito l'assemblaggio indotto da una immersione che non ha ∞ nella sua immagine a dalla definizione dell'azione di $\mathfrak{S}_\beta$ sull'insieme degli assemblaggi (cfr §1.9). ∎

Dalla proposizione appena vista segue allora che $\mathfrak{A}_1^\beta$ definisce una applicazione:

$$\mathfrak{A}_2^\beta : E^\beta(f) \longrightarrow \mathcal{A}_m^\beta(w)/_{\mathfrak{S}_\beta}. \tag{2}$$

Osservazione 1.11.9. Osserviamo che l'applicazione in (1) è in realtà definita soltanto dopo aver scelto un ordinamento dei punti che costituiscono $F^{-1}(\infty)$, per ogni $F \in E^\beta(f)$. Evidentemente questa indeterminazione non si ha più nell'applicazione data in (2).

Proposizione 1.11.10. *Siano $F : S \to \mathbf{N}$ ed $F' : S' \to \mathbf{N}$ due estensioni r–equivalenti di f. Allora:*

$$\mathfrak{A}_2^\beta(F) = \mathfrak{A}_2^\beta(F').$$

Dim: Sia $\Phi : S \to S'$ un diffeomorfismo tale che $F = f' \circ \Phi$ e sia $\{p_1, \ldots, p_\beta\} = F^{-1}(\infty)$. Detti $q_i = \Phi(p_i)$ evidentemente risulta: $\{q_1, \ldots, q_\beta\} = {F'}^{-1}(\infty)$. Rispetto a queste scelte degli ordinamenti dei punti di $F^{-1}(\infty)$ e ${F'}^{-1}(\infty)$, per ogni $\sigma \in \mathfrak{S}_\beta$ risulta che F_σ ed F'_σ sono due estensioni r–equivalenti di f^β la cui immagine non contiene ∞. Ma allora, per il Teorema 1.11.1,

$$\mathfrak{A}(F_\sigma) = \mathfrak{A}(F'_\sigma),$$

da cui evidentemente segue la tesi. ∎

Da questa proposizione segue allora che l'applicazione $\mathfrak{A}_2^\beta$, in (2), passa a quoziente definendo un'applicazione:

$$\mathfrak{A}^\beta : E^\beta(f)/_{\text{r–equivalenza}} \longrightarrow \mathcal{A}_m^\beta(w)/_{\mathfrak{S}_\beta}. \tag{3}$$

Dimostriamo ora che tale applicazione è biunivoca.

Iniettività: Siano $F : S \to \mathbf{N}$ ed $F' : S' \to \mathbf{N}$ due estensioni di f tali che $\mathfrak{A}^\beta(F) = \mathfrak{A}^\beta(F')$. In altri termini, detti $\{p_1, \ldots, p_\beta\} = F^{-1}(\infty)$ e $\{q_1, \ldots, q_\beta\} = {F'}^{-1}(\infty)$, esistono permutazioni $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_\beta$ tali che:

$$\mathfrak{A}_1^\beta(F, \sigma) = \mathfrak{A}_1^\beta(F', \sigma'), \tag{4}$$

essendo $\mathfrak{A}_1$ definita a partire dagli ordinamenti scelti per $F^{-1}(\infty)$ ed ${F'}^{-1}(\infty)$. Ma allora, per come è definita $\mathfrak{A}_1^\beta$, ciò significa che $\mathfrak{A}(F_\sigma) = \mathfrak{A}(F'_{\sigma'})$ e quindi, per Teorema 1.11.1, F_σ ed $F'_{\sigma'}$ sono r–equivalenti ossia esiste un diffeomorfismo $\Phi_\sigma^{\sigma'} : S_\sigma \to S'_{\sigma'}$ tale che $F_\sigma = F'_{\sigma'} \circ \Phi_\sigma^{\sigma'}$.

D'altra parte, detta D_i^j la componente connessa di $F^{-1}(D_i)$ contenente il punto p_j e $D_i'^j$ la componente di ${F'}^{-1}(D_i)$ contenente q_j, si ha evidentemente che $F\big|_{D_i^{\sigma i}}$ ed $F'\big|_{D_i'^{\sigma' i}}$, essendo embeddings con la stessa immagine, sono senz'altro r–equivalenti, ossia esistono β diffeomorfismi $\Phi_i : D_i^{\sigma i} \to D_i'^{\sigma' i}$ tali che $F\big|_{D_i^{\sigma i}} = F'\big|_{D_i'^{\sigma' i}} \circ \Phi_i$.

Dato che $S = S_\sigma \cup \bigcup_{i=1}^{\beta} D_i^{\sigma i}$ ed $S' = S'_{\sigma'} \cup \bigcup_{i=1}^{\beta} D_i^{\sigma' i}$ e che evidentemente i diffeomorfismi $\Phi_\sigma^{\sigma'}$ e Φ_i si incollano, si ha la tesi.

Surgettività: Sia $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}_m^\beta(w)$. Per il Teorema 1.11.1, esistono una superficie S con $k + \beta$ componenti di bordo ed una immersione $F : S \to \mathbf{N}$, $F \in E^0(f^\beta)$, tali che $\mathfrak{A}(F) = \mathfrak{A}$.

È immediato verificare che si possono attaccare dei dischi alle β componenti di bordo di S corrispondenti alle curve $g_1, \ldots, g_\beta$ ed estendere F a questi dischi per ottenere una immersione da una superficie con k componenti di bordo, che estende f e che induce l'assemblaggio $\mathfrak{A}$.

Con questo si conclude la dimostrazione del Teorema 1.9.14. ∎

1.12. Due utili Lemmi

Concludiamo questo capitolo con la dimostrazione di alcuni lemmi che ci saranno utili nel seguito (cfr. Cap. 2), e che rafforzano l'enunciato del Teorema 1.9.14.

Sia R un sistema di segmenti per la curva f e sia $R' = R - Q$ dove $Q \subseteq A$ è costituito di segmenti la cui prima intersezione con Γ è positiva.

Definizione 1.12.1. *Chiameremo sistema di segmenti ridotto, un siffatto insieme di segmenti.*

Siano $w = w_R$ e $w' = w_{R'}$, le parole per f determinate rispettivamente da R e da R'. Si consideri l'applicazione:

$$\widehat{\ } : \mathcal{A}^\beta(w) \longrightarrow \mathcal{A}^\beta(w') \tag{1}$$

che ad $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}^\beta(w)$ associa l'assemblaggio $\widehat{\mathfrak{A}}$ ottenuto da $\mathfrak{A}$ eliminando tutte le coppie del tipo $\{x_{i,j,\mu}^{-1}, x_{i,j',\mu'}\}$ tali che $r_i \in Q$. Dimostreremo il seguente:

Lemma 1.12.2. *L'applicazione* $\widehat{\ }$ *è una bigezione tra* $\mathcal{A}_m^\beta(w)$ *e* $\mathcal{A}_m^\beta(w')$.

Cominciamo con il caso in cui l'insieme Q sia costituito da un solo segmento r_i. Sia $\widetilde{r}_i$ un segmento costruito nel modo seguente: $\widetilde{r}_i$ coincide con r_i sino immediatamente dopo il punto $x_{i,1,\mu}$, quindi procede all'interno della componente connessa di $\mathbf{N} - \Gamma$ finchè non incontra un altro segmento r_h e procede poi parallelamente a questo in un suo piccolo intorno V_h che non contiene incroci di Γ (cfr. Fig. 27).

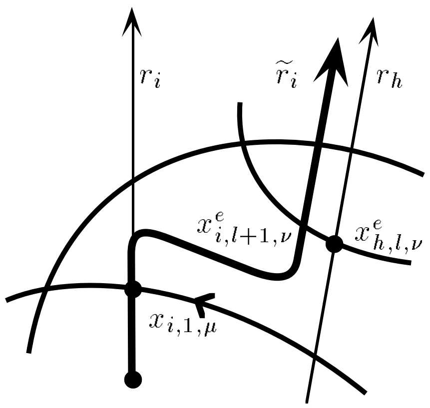


Fig. 27

Siano $\widetilde{R}$ il sistema di segmenti ottenuto da R sostituendo r_i con $\widetilde{r}_i$ e $\widetilde{w} = w_{\widetilde{R}}$ la parola per f definita da $\widetilde{R}$. Chiaramente, oltre all'applicazione (1), abbiamo anche l'analoga per $\widetilde{w}$, ossia:

$$\widehat{\ } : \mathcal{A}^\beta(\widetilde{w}) \longrightarrow \mathcal{A}^\beta(w') \tag{2}$$

ottenuta eliminando le coppie di lettere in $\widetilde{r}_i$.

Lemma 1.12.3. *Per ogni* $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}^\beta(w)$ *[risp.* $\mathcal{A}^\beta(\widetilde{w})$*] risulta:*

$$l(\widehat{\mathfrak{A}}) \geq l(\mathfrak{A}) \quad e \quad h(\widehat{\mathfrak{A}}) \leq h(\mathfrak{A}).$$

DIM: La prima delle due è evidente, dato che, togliendo dei lati propri, il numero di componenti non può che aumentare. Per quanto riguarda la seconda, siano G e $\widehat{G}$ i grafi associati rispettivamente ad $\mathfrak{A}$ ed $\widehat{\mathfrak{A}}$. Consideriamo due casi, secondo che i due grafi abbiano o meno lo stesso numero di componenti.

Caso (I): $l(G) = l(\widehat{G})$. In questo caso la tesi è evidente in quanto un'immersione per G fornisce un'immersione anche per $\widehat{G}$.

Caso (II): $l(G) < l(\widehat{G})$ e per semplicità, ma lo stesso ragionamento funziona in generale, supponiamo $l(G) = 1$ ed $l(\widehat{G} = 2)$. Siano G_1 e G_2 le componenti di $\widehat{G}$; chiaramente G_1 e G_2 sono immersi disgiuntamente nella superficie S in cui G è immerso in modo minimale. Sia C una curva liscia che sconnette S e lascia da parti opposte G_1 e G_2.

Tagliando S lungo C, si ottengono superficie $S_1, \ldots, S_n$, denotiamo con S_i' la superficie ottenuta da S_i attaccando dei dischi alle componenti di bordo generate dal taglio. Si ottengono allora due superficie con bordo S_1 ed S_2, che contengono ciascuna una componente di $\widehat{G}$, e superficie chiuse $S_3, \ldots, S_n$.

Siano s il numero di componenti connesse di C, e k, k_1, k_2 il numero di componenti di bordo di S, S_1', S_2' rispettivamente. Dal fatto che $\chi(S) = \sum_{i=1}^{n} \chi(S_i') - 2s$, ne segue:

$$2 - k - h(S) = 2 - k_1 - h(S_1') + 2 - k_1 - h(S_2') + \sum_{i=3}^{n} \big(2 - h(S_i')\big) - 2s,$$

da cui:

$$h(S) = \sum_{h=1}^{n} h(S_i') + 2(s - n + 1).$$

Poichè tagliando lungo s circonferenze disgiunte si ottengono al più $s + 1$ componenti connesse, $s - n + 1 \geq 0$ e quindi $h(S) \geq \sum_{i=1}^{n} h(S_i') \geq h(S_1') + h(S_2')$, da cui la tesi. $\square$

Osservazione 1.12.4. Sia $x^e_{h,l,\nu}$ il primo punto sul segmento r_h dopo che $\widetilde{r}_i$ entra in V_h, allora la parola $\widetilde{w}$ è ottenuta da w' con le seguenti operazioni: $\forall\, j \geq l$

$$\text{si metta} \quad \begin{Bmatrix} x^e_{i,j+1,+1} x^e_{h,j,+1} \\ x^e_{h,j,-1} x^e_{i,j+1,-1} \end{Bmatrix} \quad \text{al posto di} \quad \begin{Bmatrix} x^e_{h,j,+1} \\ x^e_{h,j,-1} \end{Bmatrix} \quad \text{se } \widetilde{r}_i \text{ è sulla sinistra di } r_h$$

$$\text{si metta} \quad \begin{Bmatrix} x^e_{h,j,+1} x^e_{i,j+1,+1} \\ x^e_{i,j+1,-1} x^e_{h,j,-1} \end{Bmatrix} \quad \text{al posto di} \quad \begin{Bmatrix} x^e_{h,j,+1} \\ x^e_{h,j,-1} \end{Bmatrix} \quad \text{se } \widetilde{r}_i \text{ è sulla destra di } r_h$$

In particolare la lettera $x^e_{i,j,\mu}$ compare in $\widetilde{w}$ se e solo se $x^e_{h,j-1,\mu}$ compare in w' e $j \geq l$.

Si può quindi definire l'applicazione $\widetilde{\ }: \mathcal{A}(w') \longrightarrow \mathcal{A}(\widetilde{w})$ che ad $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}(w')$ associa l'assemblaggio:

$$\widetilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} \cup \big\{\{x^{-1}_{i,j-1,\mu}, x_{i,j'-1,\mu'}\} \bigm| \{x^{-1}_{h,j,\mu}, x_{h,j',\mu'}\} \in \mathfrak{A},\ \text{e } j \geq l\big\}.$$

Evidentemente $\widetilde{\ }$ è iniettiva ed in più:

$$\widetilde{\widetilde{\mathfrak{A}}} = \mathfrak{A} \qquad \forall\ \mathfrak{A} \in \mathcal{A}(w') \tag{3}$$

ovvero l'applicazione in (2) è surgettiva.

Lemma 1.12.5. *Per ogni* $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}^{\beta}(w')$ *risulta:* $h(\widetilde{\mathfrak{A}}) = h(\mathfrak{A})$ *ed* $l(\widetilde{\mathfrak{A}}) = l(\mathfrak{A})$.

DIM: Siano $G(\mathfrak{A}) \hookrightarrow S$ una immersione minimale ed $\{x^{-1}_{i,j-1,\mu}, x_{i,j'-1,\mu'}\} \in \widetilde{\mathfrak{A}}$; per definizione di grafo associato ad un assemblaggio, il lato determinato da questa coppia ha lo stesso peso di quello determinato dalla coppia $\{x^{-1}_{h,j,\mu}, x_{h,j',\mu'}\} \in \mathfrak{A}$.

D'altra parte, le lettere $x^{-1}_{i,j-1,\mu}$ ed $x_{i,j'-1,\mu'}$ entrambe precedono [risp. seguono, cfr. Osservazione 1.12.4] rispettivamente le lettere $x^{-1}_{h,j,\mu}$ ed $x_{h,j',\mu'}$, se i segni μ e μ' sono concordi, mentre una precede e l'altra segue la propria corrispettiva se μ e μ' sono discordi; da ciò è immediato dedurre che il lato di $G(\widetilde{\mathfrak{A}})$ determinato dalla coppia $\{x^{-1}_{i,j-1,\mu}, x_{i,j'-1,\mu'}\}$ si può immergere in S in un piccolo intorno del lato determinato dalla coppia $\{x^{-1}_{h,j,\mu}, x_{h,j',\mu'}\}$ (vedi Fig. 28). ∎

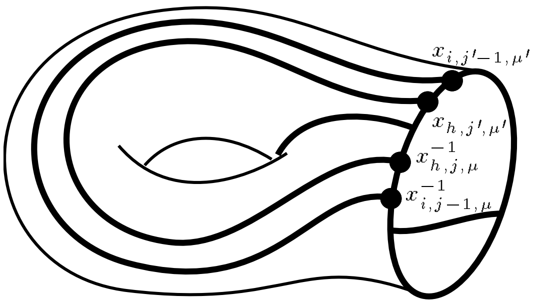


Fig. 28

Proposizione 1.12.6. *Se* $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}^{\beta}_{m}(w)$ *[risp.* $\mathcal{A}^{\beta}_{m}(\widetilde{w})$*], allora* $\widehat{\mathfrak{A}} \in \mathcal{A}^{\beta}_{m}(w')$

DIM: Per il Lemma 1.12.3 si ha:

$$R_X(f) = 2l(\mathfrak{A}) - k - h(\mathfrak{A}) - \beta\chi(\mathbf{N}) \leq 2l(\widehat{\mathfrak{A}}) - k - h(\widehat{\mathfrak{A}}) - \beta\chi(\mathbf{N}).$$

D'altra parte da Lemma 1.12.5 e Proposizione 1.10.20 segue:

$$R_X(f) \geq 2l(\widetilde{\widehat{\mathfrak{A}}}) - k - h(\widetilde{\widehat{\mathfrak{A}}}) - \beta\chi(\mathbf{N}) = 2l(\widehat{\mathfrak{A}}) - k - h(\widehat{\mathfrak{A}}) - \beta\chi(\mathbf{N}),$$

e quindi la tesi. ∎

Dalla proposizione precedente segue allora che sono definite le applicazioni:

$$\widehat{\ } : \mathcal{A}_m^\beta(w) \longrightarrow \mathcal{A}_m^\beta(w') \tag{4}$$

$$\widehat{\ } : \mathcal{A}_m^\beta(\widetilde{w}) \longrightarrow \mathcal{A}_m^\beta(w') \tag{5}$$

restrizioni delle applicazioni in (1) e (2). Per dimostrare il Lemma 1.12.2 (nel caso che Q sia costituito da un solo segmento), dobbiamo mostrare che l'applicazione in (4) è iniettiva, dato che la (3) e Lemma 1.12.5 garantiscono la surgettività.

Definiamo ora l'applicazione $\Phi : \mathcal{A}_m^\beta(w) \to \mathcal{A}_m^\beta(\widetilde{w})$ nel modo seguente: dato $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}_m^\beta(w)$ sia $F_\mathfrak{A} \in E^0(f^\beta)$ tale che $G_R(F_\mathfrak{A})$ sia uguale a $G(\mathfrak{A})$. Poniamo allora $\Phi(\mathfrak{A})$ l'assemblaggio tale che $G_{\widetilde{R}}(F_\mathfrak{A}) = G\big(\Phi(\mathfrak{A})\big)$. Evidentemente questa è una buona definizione ed in più è di immediata dimostrazione la seguente:

Proposizione 1.12.7. *Φ è biunivoca e per ogni $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}_m^\beta(w)$ $\quad \widehat{\Phi(\mathfrak{A})} = \widehat{\mathfrak{A}}$.*

Osservazione 1.12.8. Dalla proposizione precedente segue immediatamente che, dimostrando che la (5) è iniettiva, dimostriamo che anche la (4) lo è.

La tesi di Lemma 1.12.2, nel caso R costituito da un solo segmento, segue allora dalla seguente:

Proposizione 1.12.9. *Sia $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}_m^\beta(w')$ e sia $\mathfrak{A}_1 \in \mathcal{A}_m^\beta(\widetilde{w})$ tale che $\widehat{\mathfrak{A}}_1 = \mathfrak{A}$, allora $\mathfrak{A}_1 = \widetilde{\mathfrak{A}}$.*

DIM: Sia $\{x_{h,j,\mu}^{-1}, x_{h,j',\mu'}\} \in \mathfrak{A}$ con $j \geq l$ e sia $F \in E^0(f^\beta)$ tale che $G_{\widetilde{R}}(F) = G(\mathfrak{A}_1)$ e sia $\widetilde{V}$ la componente connessa di $F^{-1}(V_h)$ contenente il lato di $G_{\widetilde{R}}(F)$ che appaia $x_{h,j,\mu}^{-1}$ con $x_{h,j',\mu'}$. Poichè F, ristretta ad ogni componente connessa di $F^{-1}(V_h)$, è biunivoca, è immediato verificare che la componente di $F^{-1}(\widetilde{r}_i)$ contenuta in $\widetilde{V}$ appaia $x_{i,j+1}^{-1}$ con $x_{i,j'+1}$. Ovvero $\mathfrak{A}_1 = \widetilde{\mathfrak{A}}$. ∎

Osservazione 1.12.10. I ragionamenti usati per dimostrare il caso in cui R sia costituito da un solo segmento, si possono ripetere induttivamente per dimostrare tutte le proposizioni ed i lemmi usati nel caso in cui R non sia costituito da un solo segmento, dimostrando in tal modo il Lemma 1.12.2.

Osservazione 1.12.11. Osserviamo ancora che evidentemente l'applicazione $\widehat{\ }$ commuta con l'azione del gruppo simmetrico sull'insieme degli assemblaggi, quindi passa a quoziente definendo una applicazione biunivoca:

$$\widehat{\ } : \mathcal{A}_m^\beta(w)/_{\mathfrak{S}_\beta} \longrightarrow \mathcal{A}_m^\beta(w')/_{\mathfrak{S}_\beta}.$$

Grazie al Lemma 1.12.2 ed all'osservazione precedente, il teorema 1.9.14 può allora essere rafforzato nel seguente:

Teorema 1.12.12. *Sia $f : \coprod_{h=1}^k \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ una curva generica e sia w una k–parola per f definita a partire da un sistema di segmenti ridotto, allora l'insieme $E^\beta(f)/_{\text{r-equivalenza}}$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathcal{A}_m^\beta(w)/_{\mathfrak{S}_\beta}$ dei β–assemblaggi minimali di w modulo l'azione del gruppo simmetrico.*

Concludiamo la sezione dimostrando un altro Lemma che ci sarà utile nel prossimo capitolo.

Definizione 1.12.13. *Sia $f : \coprod_{h=1}^k \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ una curva generica. Diremo che f ha un occhiello se esistono $t_0, t_1 \in \mathbf{S}^1$ tali che $f(t_0) = f(t_1)$ ed $f|_{[t_0,t_1]}$ borda un disco $D \subset \mathbf{N}$, che non contiene rami di Γ (eccetto, ovviamente, il suo bordo). Chiameremo occhiello la curva $f|_{[t_0,t_1]} : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$, avendo identificato $\mathbf{S}^1 = [t_0, t_1]/_{t_0=t_1}$.*

Se f ha un lato, la sua restrizione ne induce ovviamente uno anche su $f|_{[t_0,t_1]}$.

Definizione 1.12.14. *Diremo che un occhiello è positivo se il lato indotto dal lato di f punta verso l'interno del disco. Diremo che è negativo, se punta verso l'esterno.*

Lemma 1.12.15. *Sia f una k–curva generica con un occhiello positivo e sia w una parola per f definita a partire de un sistema, eventualmente ridotto, di segmenti. Supponiamo che l'occhiello in questione non contenga il punto ∞; allora:*

$$\mathcal{A}_m^\beta(w) = \varnothing\,.$$

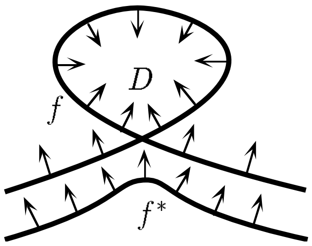


Fig. 29

Dim: Evidentemente, basta dimostrare la tesi per un sistema di segmenti ridotto particolare. Costruiamo allora un sistema di segmenti ridotto, come segue.

Sia D il disco bordato dall'occhiello. Dato che l'occhiello è positivo, ogni segmento uscente da D ha la sua prima intersezione con Γ positiva. Quindi possiamo supporre che da D non parta nessun segmento. Inoltre, dato che $\infty \notin D$, possiamo supporre che ogni altro segmento non intersechi D.

Sia w la parola determinata da un siffatto sistema ridotto, e sia $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}^\beta(w)$. Sia f^* la curva ottenuta da f eliminando l'occhiello in questione come suggerito in Fig. 29. Osserviamo ora che R è un sistema di segmenti, eventualmente ridotto per f^* e che w è la parola determinata da R anche per f^*. Ma allora, per Proposizione 1.10.20, che in virtù di Osservazione 1.12.10 vale anche per parole determinate da sistemi ridotti, per ogni $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}^\beta(w)$ risulta:

$$R_X(f^*) \geq 2l(\mathfrak{A}) - k - h(\mathfrak{A}) - \beta\chi(\mathbf{N}).$$

Ma da Proposizione 1.7.23 e da Osservazione 1.7.19 si deduce che:

$$R_X(f^*) = R_X(f) - 1,$$

da cui la tesi. ∎

Capitolo 2: Estensioni di curve con cuspidi e nodi

Siano S ed $\mathbf{N}$ superficie compatte, senza bordo. È un fatto ben noto (cfr. [**W**], [**B–L**]) che l'insieme delle applicazioni generiche $S \to \mathbf{N}$, è caratterizzato da due proprietà: una prima di natura locale, ed un'altra di natura globale. La prima, che caratterizza i germi generici, è la seguente:

(1) in ogni punto il germe dell'applicazione $F : S \to \mathbf{N}$ è equivalente ad uno dei seguenti tre germi $(\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$:

$$(x, y) \mapsto (x, y), \qquad (x, y) \mapsto (x, y^2), \qquad (x, y) \mapsto (x, y^3 - xy).$$

È immediato verificare che se F verifica la precedente proprietà, allora l'insieme Σ dei punti critici di F è una sottovarietà di S, liscia e di dimensione 1; ha quindi senso richiedere che F verifichi la seguente:

(2) $F|_\Sigma$ è una curva con soltanto cuspidi e nodi (cfr. Definizione 2.1.2).

In questo capitolo ci proponiamo di studiare il problema suscitato naturalmente da questo enunciato, ovvero:

(1) data una curva con cuspidi e nodi $f : \coprod_{h=1}^k \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$, esistono una superficie S ed una applicazione generica $F : S \to \mathbf{N}$ tale che $\Sigma = \coprod_{h=1}^k \mathbf{S}^1$ ed $F|_\Sigma = f$?

(2) in caso di risposta affermativa alla domanda precedente, quante sono tali estensioni a meno di equivalenza destra?

Daremo una risposta a questi quesiti usando un'estensione, per curve con cuspidi e nodi, della parola di Blank vista nel capitolo precedente.

2.1. Curve con cuspidi e nodi

Definizione 2.1.1. *Siano* $\mathbf{N}$ *una superficie,* I *un intervallo della retta reale. Sia* $f : I \to \mathbf{N}$ *una curva differenziabile, diremo che* $t_0 \in I$ *è un punto di cuspide per* f*, se esistono germi di diffeomorfismo* $\gamma : \big(I, t_0\big) \to \big(\mathbb{R}, 0\big)$ *e* $\varphi : \big(\mathbf{N}, f(t_0)\big) \to \big(\mathbb{R}^2, 0\big)$ *tali che:*

$$\big(\varphi \circ f \circ \gamma\big)(s) = (s^2, s^3).$$

Il punto $f(t_0)$ *sarà detto una cuspide.*

Non è difficile vedere che il diffeomorfismo γ può essere supposto della forma $\gamma(s) = t_0 + s$, cosa che d'ora in avanti faremo.

Definizione 2.1.2. *Una applicazione* $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$*, sarà chiamata una* k*–curva con cuspidi e nodi, se:*

(1) f *è regolare, ovvero* $f' \neq 0$*, salvo per un numero finito di punti di cuspide;*
(2) f *è iniettiva salvo per un numero finito di incroci normali.*

Denoteremo con $\Gamma = \Gamma_f$ *il supporto di* f $(\Gamma_f = f(\coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1))$.

Sia $\mathcal{C}$ l'insieme dei punti di cuspide di $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$; per definizione, la curva $f\big|_{(\coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1) - \mathcal{C}}$ è una curva regolare, ha quindi senso porre la seguente definizione:

Definizione 2.1.3. *Diremo che* f *ha due lati se e solo se* $f\big|_{(\coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1) - \mathcal{C}}$ *ha un lato (cfr. Definizione 1.7.3) che all'intorno di ogni cuspide è diretto verso l'interno o verso l'esterno della cuspide stessa, concordemente su entrambi i rami della cuspide.*

Una cuspide sarà detta positiva se il lato è diretto verso l'esterno della cuspide, negativa nell'altro caso (cfr. Fig. 30).

Fig. 30

Osservazione 2.1.4. Evidentemente la curva f ha un lato se e solo se esiste un campo di vettori lungo $f\Big|_{(\coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1)-\mathcal{C}}$, che sia trasversale ad $f\Big|_{(\coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1)-\mathcal{C}}$ e tale che all'intorno di ogni cuspide sia diretto o verso l'interno o verso l'esterno della cuspide, concordemente su entrambi i rami della cuspide. Chiameremo indifferentemente lato per f tanto un'orientazione del fibrato normale ad $f\Big|_{(\coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1)-\mathcal{C}}$, come in Definizione 1.7.3, quanto un campo di vettori come quello appena descritto.

Definizione 2.1.5. *Un lato per una curva con cuspidi sarà detto coerente se e solo se tutte le cuspidi sono negative.*

Proposizione 2.1.6. *Se $F : S \to \mathbf{N}$ è un'applicazione generica, allora la curva $f|_\Sigma$ ha un lato coerente.*

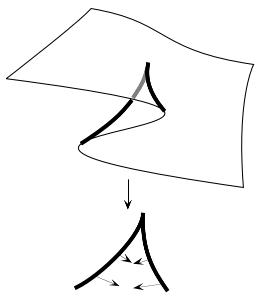


Fig. 31

DIM: Intuitivamente basta prendere un campo diretto nella direzione verso cui l'applicazione piega la superficie (cfr. Fig. 31). Per formalizzare questo discorso euristico, basta prendere un campo $n(p)$ in $\ker\big(dF(p)\big)$, non nullo e continuo, eventualmente a meno di cambiamenti di segno, e considerare il campo lungo $F|_{\Sigma-\mathcal{C}}$ definito da $m(p) = d_0^2F(p)\big[n(p)\big]^2$, dove con $d_0^2F : \ker dF \to \operatorname{coker} dF$ denotiamo il differenziale quadratico (cfr. [**B–L**]). Non è difficile, sfruttando le proprietà locali di F nei punti di piega, dimostrare che il campo m è diretto verso l'interno di ciascuna cuspide. ∎

Definizione 2.1.7. *Chiameremo lato indotto da F su $F|_\Sigma$ il lato fornito dalla dimostrazione della proposizione precedente.*

Osservazione 2.1.8. La Proposizione precedente fornisce una ben nota condizione necessaria affinchè una curva con cuspidi e nodi possa essere il contorno apparente di una applicazione generica (cfr. [**Pi3**]).

2.2. Estensioni locali

Sia $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ una curva con cuspidi e nodi munita di un lato, non necessariamente coerente, e sia $D \subseteq \mathcal{C}$ un sottoinsieme dell'insieme delle cuspidi di f.

Definizione 2.2.1. *Chiameremo D–deformazione del primo tipo di f la 2–curva:*

$$f^*_D = f^*_{D,1} \coprod f^*_{D,2} : \mathbf{S}^1 \coprod \mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbf{N}$$

ottenuta raddoppiando f in un suo intorno, e deformando le cuspidi nel modo suggerito in Fig. 32. Fissato un punto base $p \in \Gamma$, chiameremo deformazione del secondo tipo di f la curva:

$$f^{**}_D : \mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbf{N}$$

ottenuta modificando f^*_D, in un intorno di p, nel modo suggerito in Fig. 33.

Osservazione 2.2.2. È evidente che se $D \subseteq \mathcal{C}$ allora $f^*_D = f^*_{(\mathcal{C}-D)}$ ed $f^{**}_D = f^{**}_{(\mathcal{C}-D)}$.

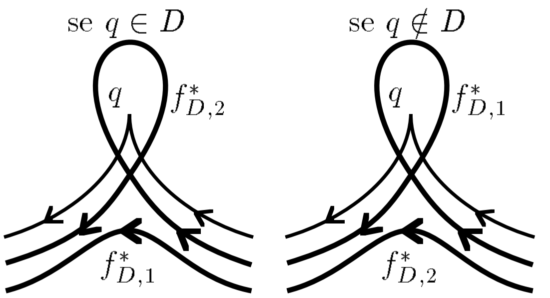


Fig. 32

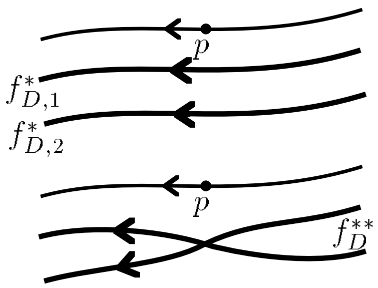


Fig. 33

Non è difficile vedere che se $F : \mathbf{S}^1 \times [-1,1] \to \mathbf{N}$ è una estensione generica di f con luogo critico $\mathbf{S}^1 = \mathbf{S}^1 \times \{0\}$, allora esiste un intorno tubolare U di $\mathbf{S}^1$ tale che $f|_{\partial U} = f^*_D$, per una scelta opportuna di D, ed analogamente se denotiamo con $M = \mathbb{R} \times [-1,1] /_{(x,t)=(x+1,-t)}$ il nastro di Mœbious, ed $F : M \to \mathbf{N}$ è una estensione generica di f con luogo critico $\mathbf{S}^1 = \mathbb{R}/_{x=x+1}$, allora esiste un intorno tubolare U di $\mathbf{S}^1$ in M tale che $f|_{\partial U} = f^{**}_D$, per una opportuna scelta di D. Inoltre tale D è unico a meno di complementazione.

Chiameremo questo insieme D (a meno di complementazione) l'insieme di deformazione indotto dalla estensione di f.

Definizione 2.2.3. *Siano* $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ *una* k*–curva con cuspidi e nodi,* $D \subseteq \mathcal{C}$ *ed* $H = \{H_1, H_2\}$ *una partizione dell'insieme* $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Chiameremo (D, H)*–deformazione di* f *la* k_H*–curva:*

$$f_{(D,H)} : \coprod_{h=1}^{k_H} \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$$
$$f_{(D,H)} = \{(f_h)_D^* \mid h \in H_1\} \coprod \{(f_h)_D^{**} \mid h \in H_2\}$$

essendo $k_H = 2\#H_1 + \#H_2$.

Osservazione 2.2.4. È evidente che $f_{(D,H)} = f_{(\mathcal{C}-D,H)}$, anzi, denotato con $\mathcal{C}_h$ l'insieme delle cuspidi nella componente h–esima della curva e posto $D_h = D \cap \mathcal{C}_h$, è immediato verificare che $f_{(D,H)} = f_{(D',H)}$ per ogni D' tale che $D'_h = D_h$ oppure $D'_h = \mathcal{C}_h - D_h$.

Chiaramente, se F è una estensione generica ad una unione disgiunta di k cilindri e nastri di Mœbious della k–curva f, allora esiste un intorno tubolare U di $\coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1$ tale che $F|_{\partial U} = f_{(D,H)}$ per una opportuna scelta di (D, H). Chiameremo questa coppia la coppia di deformazione indotta dall'estensione di f.

Osservazione 2.2.5. Osserviamo che se F è una estensione generica di f e t_0 è un punto di cuspide, allora se $v \in T_{t_0}(S) - \ker(dF(t_0))$ risulta che $dF(t_0)[v]$ è un vettore tangente alla cuspide. Identifichiamo:

$$\mathbf{S}^1 \times [0,1] = \mathbb{R} \times [0,1] \big/_{(x,y)=(x+1,y)}$$
$$M = \mathbb{R} \times [0,1] \big/_{(x,y)=(x+1,-y)}$$

ed $\mathbf{S}^1$ con $\mathbb{R}/_{x=x+1}$ in modo che nessun punto di cuspide abbia coordinata intera. Denotiamo con $\widetilde{F} : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbf{N}$ il sollevamento di F al rivestimento universale.

Osserviamo allora che, con tali identificazioni, l'insieme di deformazione indotto da F è definito (sempre a meno di complementazione) da:

$$D = \{t \in (0,1) \mid t \text{ è di cuspide e } d\widetilde{F}(t)\big[(0,1)\big] \text{ punta verso l'interno della cuspide}\}.$$

Nel seguito, per semplicità di notazione, indicheremo sia F che $\widetilde{F}$ con lo stesso simbolo F. Sarà chiaro dal contesto a quale delle due applicazioni ci si starà riferendo.

Lemma 2.2.6. *Sia $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ una curva con cuspidi e con un lato coerente, sia $D \subseteq \mathcal{C}$; allora esiste una estensione $F : \mathbf{S}^1 \times [0,1] \to \mathbf{N}$ di f che induce D come insieme di deformazione.*

DIM: Usiamo le identificazioni dell'osservazione precedente. Siano $t_1, \ldots, t_c \in (0,1)$ i punti di cuspide di f, per ogni cuspide $q_i = f(t_i)$ prendiamo un piccolo intorno U_i con un diffeomorfismo $\varphi_i : (U_i, q_i) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ tale che:

$$\varphi_i \circ f(t) = \big(3(t-t_i)^2, -2(t-t_i)^3\big).$$

Definiamo allora

$$\widetilde{F}_i(t,y) = \begin{cases} \big(y + 3(t-t_i)^2, -2(t-t_i)^3 - (t-t_i)y\big) & \text{se } t_i \in D; \\ \big(-y + 3(t-t_i)^2, -2(t-t_i)^3 + (t-t_i)y\big) & \text{se } t_i \notin D. \end{cases}$$

Per ogni i l'applicazione $\widetilde{F}_i$ appena definita è evidentemente una estensione generica, locale di $\varphi_i \circ f$ con luogo critico in $\{y = 0\}$, e pertanto possiamo asserire che esiste $\sigma > 0$ tale che:

$$\varphi_i^{-1} \circ \widetilde{F}_i : (t_i - \sigma, t_i + \sigma) \times (-\sigma, \sigma) \longrightarrow \mathbf{N}$$

è definita ed è una estensione generica di f, localmente attorno le cuspidi, con luogo critico in $\{y = 0\}$. Non è altresì difficile vedere che $dF_i(t_i)\big[(0,1)\big]$ è diretto verso l'interno della cuspide corrispondente, se e solo se $t_i \in D$.

In definitiva, abbiamo una applicazione:

$$F_* : \bigcup_{i=1}^{c} (t_i - \sigma, t_i + \sigma) \times (-\sigma, \sigma) \longrightarrow \mathbf{N}$$

che estende $f\big|_{\bigcup_{i=1}^{c}(t_i - \sigma, t_i + \sigma)}$, generica e con piega su $\{y = 0\}$, e dobbiamo mostrare che tra due punti di cuspide successivi si può trovare una estensione generica F di f, con luogo critico $\{y = 0\}$ e che coincide con F_* in un intorno dei punti di cuspide in questione.

Sia $\mathbf{v}(t)$ un campo di vettori che definisce il lato di f e siano $t_i < t_{i+1}$ due punti di cupide successivi; prendiamo punti $a < a' \in (t_i, t_i + \sigma)$ e $b' < b \in (t_{i+1} - \sigma, t_{i+1})$; un semplice calcolo dello Jacobiano mostra che l'applicazione:

$$G : [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{N}$$

$$G : (t,s) \longrightarrow \exp_{f(t)}\big(s\mathbf{v}(t)\big)$$

è, per $|s|$ abbastanza piccolo, una immersione, essendo exp l'applicazione esponenziale rispetto ad una qualche metrica riemanniana su $\mathbf{N}$.

Sia, infine, $\sigma' > 0$ tale che:

$$F_*\Big|_{\big((a'-\sigma',a'+\sigma')\cup(b'-\sigma',b'+\sigma')\big)\times(-\sigma',\sigma')}$$

sia sollevabile mediante G ad una applicazione $\widetilde{F}_*$ tale che $\widetilde{F}_*(a') = a'$, $\widetilde{F}_*(b') = b'$ e $G \circ \widetilde{F}_* = F_*$ (vedi Fig. 34). È evidente che la tesi segue se mostriamo che si possono raccordare i due pezzi di $\widetilde{F}_*$ con una $\widetilde{F}$, generica, con luogo critico $\{y = 0\}$ e tale che $\widetilde{F}(t, 0) = (t, 0)$ per ogni $t \in [a, b]$.

Sia $\widetilde{F}_{*,1}$ la prima coordinata di $\widetilde{F}_*$, allora $\widetilde{F}_{*,1}(t, 0) = t$ per ogni t, prendiamo allora una funzione $\widehat{F}_{*,1}$ definita su un insieme del tipo $(a' - \delta, b' + \delta) \times (-\delta, \delta)$ (con $\delta < \sigma'$) tale che:

$$\widehat{F}_{*,1}(t, 0) = t \quad \forall t; \qquad \widehat{F}_{*,1}(t, y) = \widetilde{F}_{*,1}(t, y) \quad \forall t \notin [a', b'].$$

Chiaramente una tale funzione si può costruire usando le usuali tecniche di partizione dell'unità.

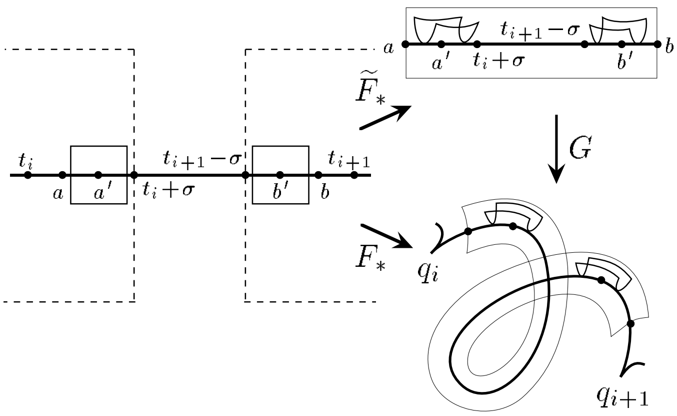


Fig. 34

L'applicazione $\Phi : (t, y) \to (\widehat{F}_{*,1}(t, y), y)$ ha nei punti $(t, 0)$ matrice jacobiana del tipo $J\Phi(t, 0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \star \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ e quindi è un diffeomorfismo all'intorno di $[a', b'] \times \{0\}$, che lascia fisso $\{y = 0\}$ ed inoltre:

$$\widetilde{F}_* \circ \Phi^{-1}(t, y) = \big(t, g(t, y)\big).$$

Pertanto, il fatto che $\widetilde{F}_*$ sia generica si traduce nelle condizioni:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(t,0)=0; \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(t,0)\neq 0;$$

da cui se ne deduce che, in un intorno di $\{y=0\}$, la funzione g è del tipo:

$$g(t,y)=y^2 h(t,y).$$

Osserviamo ora che, poichè sia il campo $\mathbf{v}$ (che definisce il lato di f) che il vettore $d_0^2 F_*(t,0)[n(t,0)]^2$ (essendo n un campo di vettori del nucleo di dF) sono diretti verso l'interno delle cuspidi, risulta che $\partial^2 g/\partial y^2(t,0)>0$ e pertanto, nella precedente espressione per g, la funzione h è tale che $h(t,0)>0$. Si può quindi trovare una funzione

$$\widehat{h}:(a'-\delta,b'+\delta)\times(-\delta,\delta)\longrightarrow\mathbb{R}$$

tale che $h(t,0)>0$ per ogni t e che coincida con h al di fuori di (a',b'). Ponendo infine:

$$\widehat{g}(t,y)=y^2\widehat{h}(t,y); \qquad \bar{F}(t,y)=\big(t,\widehat{g}(t,y)\big)$$
$$F(t,y)=G\Big(\bar{F}\big(\Phi(t,y)\big)\Big)$$

si ottiene una applicazione F che ha i requisiti richiesti. Ripetendo tale costruzione in tutti gli intervalli tra due cuspidi si ottiene l'estensione cercata. ▮

Lemma 2.2.7. *Sia $f:\mathbf{S}^1\to\mathbf{N}$ una curva con cuspidi e con un lato coerente, sia $D\subseteq\mathcal{C}$; allora esiste una estensione $F:M\to\mathbf{N}$ di f che induce D come insieme di deformazione.*

DIM: La stessa del Lemma precedente. ▮

Lemma 2.2.8. *Siano $F,G:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^2,0)$, due germi generici, singolari, con luogo critico rispettivamente Σ_F e Σ_G. Supponiamo che:*

(1) *$F(\Sigma_F)=G(\Sigma_G)=\Gamma$;*

(2) *$d_0^2F(p)[n(p)]^2$ e $d_0^2G(p)[m(p)]^2$ siano diretti verso lo stesso lato di $F(\Sigma_F)=G(\Sigma_G)$ (essendo n ed m i campi dei nuclei di $\ker dF$ e $\ker dG$ rispettivamente, ossia F e G inducono lo stesso lato su Γ).*

Allora i due germi sono equivalenti a destra, ovvero esiste un germe di diffeomorfismo $\Phi : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ *tale che* $G \circ \Phi = F$.

DIM: È chiaro che la prima delle due condizioni implica che i due germi sono equivalenti (destra–sinistra), quindi dobbiamo analizzare i due casi corrispondenti alle due possibili forme canoniche. È altresì evidente che, senza perdere in generalità, si può sostituire la (1) con

(1′) $\Sigma_F = \Sigma_G = \Sigma$ ed $F|_\Sigma = G|_\Sigma$.

Caso (I): (Forma canonica $(x, y) \mapsto (x, y^2)$) Siano $\Psi, \Phi : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ germi di diffeomorfismo tali che:

$$\widetilde{G} = \Psi \circ G \circ \Phi(x, y) = (x, y^2)$$

e poniamo $\widetilde{F} = (\widetilde{F}_1, \widetilde{F}_2) = \Psi \circ F \circ \Phi$. Chiaramente i due germi $\widetilde{F}$ e $\widetilde{G}$ verificano ancora le ipotesi di partenza e sono equivalenti a destra se e solo se F e G lo sono. Per (1′) $\widetilde{F}_1(x, 0) = x$ e quindi $\partial\widetilde{F}_1/\partial x(x, 0) = 1$. Ma allora il germe $\Phi_1(x, y) = \big(\widetilde{F}_1(x, y), y\big)$ è un germe di diffeomorfismo ed in più:

$$\widetilde{F} \circ \Phi_1^{-1}(x, y) = \big(x, f(x, y)\big).$$

Per il fatto che il diffeomorfismo Φ_1 lascia fisso l'asse $\{y = 0\}$ e per le proprietà del germe $\widetilde{F}$, si ha:

$$f(x, 0) = 0; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = 0; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, 0) \neq 0;$$

esistono quindi germi di funzioni a ed h tali che $f(x, y) = y^2 a(x) + y^3 h(x, y)$ e l'ipotesi (2), garantisce che $a(x) > 0$. Si può quindi definire il germe:

$$\Phi_2(x, y) = \Big(x, y\sqrt{a(x) + yh(x, y)}\Big)$$

che è un germe di diffeomorfismo tale che $\widetilde{F} \circ \Phi_1^{-1} \circ \Phi_2^{-1} = \widetilde{G}$.

Caso (II): (Forma canonica $(x, y^3 - xy) \mapsto (x, y)$) Come nel caso precedente, possiamo supporre che $G(x, y) = (x, y^3 - xy)$. Dalla condizione (1′) si ha:

$$\big(g_1(t), g_2(t)\big) = F(3t^2, t) = (3t^2, -2t^3),$$

da cui, derivando g_1, si ottiene:

$$6t = \frac{dg_1}{dt}(t) = 6t\frac{\partial F_1}{\partial x}(3t^2, t) + \frac{\partial F_1}{\partial y}(3t^2, t)$$

che calcolata per $t = 0$ dà $\partial F_1/\partial y(0,0) = 0$. Ma allora, dato che F è un germe generico, necessariamente $\partial F_1/\partial x(0,0) \neq 0$. Pertanto il germe $\Phi(x,y) = \big(F_1(x,y), y\big)$ è un germe di diffeomorfismo ed inoltre:

$$\begin{gathered} \Phi(3t^2, t) = (3t^2, t); \qquad F \circ \Phi^{-1}(x,y) = \big(x, f(x,y)\big); \\ f(3t^2, t) = -2t^3. \end{gathered} \tag{1}$$

Osserviamo ora che, la matrice jacobiana di $F \circ \Phi^{-1}$ ha la forma:

$$J(F \circ \Phi^{-1})(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \star & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

e quindi, poichè $d(F \circ \Phi^{-1})(3t^2, t)$ è singolare, risulta anche:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(3t^2, t) = 0. \tag{2}$$

Ma allora dalle (1) segue che per f si può trovare una scrittura del tipo:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x - 3y^2 + 3y^2, y) = f(3y^2, y) + (x - 3y^2)g(x,y) = \\ &= -2y^3 + (x - 3y^2)g(x,y); \end{aligned} \tag{3}$$

e quindi:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -6y^2 - 6yg(x,y) + (x - 3y^2)\frac{\partial g}{\partial y};$$

da cui, utilizzando la (2), si ottiene:

$$0 = -6t^2 - 6tg(3t^2, t);$$

ovvero $g(3t^2, t) = -t$.

Con lo stesso procedimento usato poco fa per f, si ottiene allora per g una scrittura del tipo:

$$g(x,y) = -y + (x - 3y^2)h(x,y)$$

che sostituita nella (3) produce, l'espressione:

$$f(x,y) = y^3 - xy + (x-3y^2)^2 h(x,y). \tag{4}$$

Quello che dobbiamo trovare, è quindi un germe di diffeomorfismo $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$ tale che $G \circ \Psi = F \circ \Phi^{-1}$ ovvero tale che risolva il sistema:

$$\begin{cases} \Psi_1(x,y) = x \\ \big(\Psi_2(x,y)\big)^3 - \Psi_1(x,y)\Psi_2(x,y) = y^3 - xy + (x-3y^2)^2 h(x,y); \end{cases}$$

che si riduce immediatamente all'equazione:

$$\big(\Psi_2(x,y)\big)^3 - x\Psi_2(x,y) = y^3 - xy + (x-3y^2)^2 h(x,y). \tag{4}$$

Osserviamo ora che se un tale germe esiste, necessariamente deve essere l'identità sul luogo critico, da cui si deduce che $\Psi_2(3t^2, t) = t$, quindi esiste un germe $k(x,y)$ tale che:

$$\Psi_2(x,y) = y + (x-3y^2)k(x,y).$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione (4), quest'ultima si riduce a:

$$(x-3y^2)^2 \big[(x-3y^2)k^3 + 3yk^2 - k\big] = (x-3y^2)^2 h(x,y)$$

ovvero:

$$Z(x,y,k) = (x-3y^2)k^3 + 3yk^2 - k - h(x,y) = 0.$$

Dato che $\partial Z/\partial k\big(0,0,h(0,0)\big) = -1$, si può applicare il teorema della funzione implicita alla funzione Z, deducendone che esiste un unico germe $k(x,y)$ tale che:

$$Z\big(x,y,k(x,y)\big) = 0,$$

da cui la tesi. $\square$

Prima di procedere, facciamo alcune osservazioni sul lemma appena dimostrato.

Osservazione 2.2.9. Innanzitutto osserviamo che la seconda delle ipotesi è stata usata soltanto nella dimostrazione del primo caso; ciò segue dal fatto che nel caso delle cuspidi, il lato indotto da un'applicazione generica è diretto verso l'interno della cuspide e quindi i lati indotti dai due germi devono forzatamente coincidere.

Osservazione 2.2.10. Osserviamo ancora che, sempre nel caso delle cuspidi, si ottiene, oltre all'esistenza di un germe di diffeomorfismo tale che $F \circ \Phi = G$, anche l'unicità di un tale germe. Invece, nel caso della piega semplice, tale unicità non vale, in quanto anche il germe:

$$\Phi_2(x,y) = \left(x, -y\sqrt{a(x) + yh(x,y)}\right)$$

fa concludere la dimostrazione. Quindi, per le pieghe semplici, non abbiamo unicità, tuttavia non è difficile vedere che esistono esattamente due germi (e precisamente i due menzionati rispettivamente nella dimostrazione e qui sopra) che realizzano l'equivalenza destra, distinti dal fatto di conservare o meno l'orientazione.

Proposizione 2.2.11. *Sia $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ una curva con cuspidi e nodi e siano date $F, G : \mathbf{S}^1 \times [-1,1] \to \mathbf{N}$ [risp. $F, G : M \to \mathbf{N}$] due estensioni generiche di f. Allora F e G sono localmente equivalenti a destra, in un intorno di $\mathbf{S}^1$, se e solo se inducono lo stesso insieme di deformazione e lo stesso lato.*

DIM: Siano $\{U_i\}_{i=1,\dots,n}$ e $\{V_i\}_{i=1,\dots,n}$ due ricoprimenti finiti di $\mathbf{S}^1$ con dei diffeomorfismi $\Phi_i : U_i \to V_i$ tali che $F|_{U_i} = G|_{U_i} \circ \Phi_i$; tali intorni e diffeomorfismi esistono per il lemma precedente. Possiamo supporre anche che:

$$\forall\ i \neq j \qquad \begin{cases} U_i \cap U_j \neq \varnothing \\ V_i \cap V_j \neq \varnothing \end{cases} \iff |i-j| \equiv 1 \mod n$$

e che per ogni punto di cuspide p_ℓ esistano unici U_{i_ℓ} e V_{i_ℓ} tali che $p_\ell \in U_{i_\ell}$ e $p_\ell \in V_{i_\ell}$.

Ricordiamo che per gli intorni delle cuspidi, il diffeomorfismo $\Phi_{i_\ell} : U_{i_\ell} \to V_{i_\ell}$ è univocamente determinato, mentre per i rimanenti si hanno esattamente due possibilità (Osservazione 2.2.10).

Sarà sufficiente provare che è possibile scegliere i diffeomorfismi, che non sono univocamente determinati, in modo che:

$$\forall\ i \qquad \Phi_i|_{U_i \cap U_{i+1}} = \Phi_{i+1}|_{U_i \cap U_{i+1}}.$$

Se consideriamo questi intorni e diffeomorfismi, definiti su $\mathbb{R} \times [-1, 1]$ (il rivestimento universale di $\mathbf{S}^1 \times [-1, 1]$ [risp. M]) osserviamo che la condizione che le due estensioni inducano lo stesso insieme di deformazione a meno di complementazione, implica, alla luce di Osservazione 2.2.5, che i diffeomorfismi attorno ai punti di cuspide o conservano tutti l'orientazione o tutti la rovesciano. È allora sufficiente prendere i diffeomorfismi indeterminati in modo da conservare o rovesciare l'orientazione concordemente a quanto succede attorno alle cuspidi. La "quasi unicità" locale di tali germi (cfr. Osservazione 2.2.10), garantisce allora che tutti i diffeomorfismi si incollano per dare il diffeomorfismo cercato. ∎

Osservazione 2.2.12. Osserviamo che l'ipotesi che F e G inducano lo stesso lato serve soltanto se tali applicazioni non hanno cuspidi, in quanto se hanno almeno una cuspide, necessariamente i lati indotti sono diretti verso l'interno delle cuspidi (cfr. Proposizione 2.1.6) e quindi coincidono.

Dai Lemmi 2.2.6, 2.2.7 e Proposizione 2.2.11 segue immediatamente:

Proposizione 2.2.13. *Sia $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ una k–curva con un lato coerente. Le classi di locale (attorno $\amalg \mathbf{S}^1$) equivalenza destra di estensioni $F : \coprod_{h=1}^{k} M_h \to \mathbf{N}$ che inducono il lato di f (dove gli M_h sono cilindri o nastri di Mœbious) sono in corrispondenza biunivoca con le coppie di deformazione (D, H) a meno della relazione di equivalenza $(D, H) \sim (D', H)$, dove D' è come in Osservazione 2.2.4.*

2.3. Numero di rotazione di curve con cuspidi

In questa sezione $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ sarà una k–curva con cuspidi e nodi munita di un lato, non necessariamente coerente, ed X un campo su $\mathbf{N}$ con un unico zero in un fissato punto $\infty \notin \Gamma$.

Denotiamo con f_* la curva generica ottenuta deformando f all'intorno di ogni cuspide, nel modo suggerito in Fig. 35. Con la notazione introdotta in §2.2, evidentemente risulta $f_* = \coprod_{h=1}^{k} (f_h)^*_{\mathcal{C},1}$. Dato che, se f ha un lato, anche le curve ottenute deformando f ne hanno uno canonicamente definito (vedi Fig. 36) ha senso porre la seguente definizione:

Definizione 2.3.1. *Chiameremo numero di rotazione di f rispetto ad X il numero:*

$$R_X(f) = R_X(f_*),$$

dove f_* si considera munita del lato indotto da f

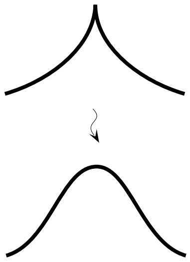


Fig. 35

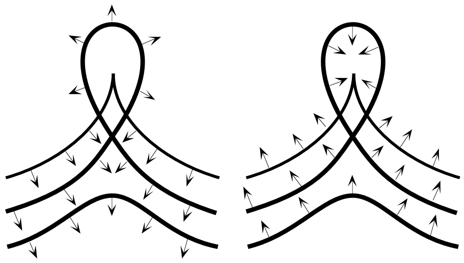


Fig. 36

Lemma 2.3.2. *Sia $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ una curva con cuspidi ed un lato fissato, e sia $D \subseteq \mathcal{C}$. Allora:*

$$R_X(f_D^{**}) = R_X(f_D^*) = 2R_X(f) - c^- + c^+;$$

dove c^+ e c^- denotano rispettivamente il numero di cuspidi positive e negative.

Dim: L'uguaglianza a sinistra segue da Proposizione 1.7.23. D'altra parte, poichè $f_{D,1}^*$ [risp. $f_{D,2}^*$] è ottenuta da f_* aggiungendo degli occhielli nell'intorno delle cuspidi in $\mathcal{C}-D$ [risp. D], negativi nell'intorno delle cuspidi negative positivi nell'intorno delle cuspidi positive, denotando con $c_{\mathcal{C}-D}^{\pm}$ [risp. $c_D^{\pm}$] il numero di cuspidi positive e negative presenti in $\mathcal{C} - D$ [risp. D], ed usando Proposizione 1.7.23 ed Osservazione 1.7.19 , come nella dimostrazione di Lemma 1.12.15, si ha:

$$R_X(f_{D,1}^*) = R_X(f_*) + c_{\mathcal{C}-D}^+ - c_{\mathcal{C}-D}^-, \quad R_X(f_{D,2}^*) = R_X(f_*) + c_D^+ - c_D^-.$$

Tali relazioni, sommate, danno evidentemente la tesi. ∎

Lemma 2.3.3. *Sia $f : \coprod_{h=1}^k \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ una curva con cuspidi, e sia (D, H) una coppia di deformazione. Allora:*

$$R_X\big(f_{(D,H)}\big) = 2R_X(f) - c^- + c^+.$$

Dim: Segue in modo ovvio dal lemma precedente. ∎

Proposizione 2.3.4. *Siano $F : S \to \mathbb{R}^2$ una applicazione generica, Σ il suo luogo critico. Dotando $F|_\Sigma$ del lato indotto da F, risulta:*

$$2R_X\big(F|_\Sigma\big) - c = \chi(S) - \beta\chi(\mathbf{N});$$

dove χ denota la caratteristica di Eulero, c il numero di cuspidi e β il numero di elementi di $F^{-1}(\infty)$.

DIM: Chiamiamo $f = F|_\Sigma$. Osserviamo innanzitutto che per Proposizione 2.1.6, tutte le cuspidi sono negative, quindi, se (D, H) è la coppia di deformazione indotta da F, per il lemma precedente si ha:

$$R_X\big(f_{(D,H)}\big) = 2R(f) - c. \tag{1}$$

Ma ora, sia U un intorno tubolare di Σ tale che $F|_{\partial U} = f_{(D,H)}$, per come è definito il lato indotto da F su $F|_\Sigma$, e come da questo se ne induce un lato su $f_{(D,H)}$, risulta evidentemente che tale lato su $f_{(D,H)}$ coincide con quello indotto dall'immersione $F|_{S-U}$. Dato che $F^{-1}(\infty) = \big(F|_{S-U}\big)^{-1}(\infty)$, da Proposizione 1.7.21 segue allora che:

$$R_X\big(f_{(D,H)}\big) = \chi(S - U) - \beta\chi(\mathbf{N}). \tag{2}$$

Ma la superficie S è ottenuta attaccando un numero finito di cilindri e nastri di Moebious al bordo di $S - U$, e pertanto $\chi(S) = \chi(S - U)$. Da questo fatto e dalle (1) e (2) segue allora la tesi. ∎

Osservazione 2.3.5. La proposizione precedente fornisce un'altra condizione necessaria, oltre a quella già fornita da Proposizione 2.1.6, affinchè una k–curva sia estendibile ad una applicazione generica $F : S \to \mathbf{N}$. Non è però difficile costruire esempi di curve che verificano entrambe queste condizioni, ma che non sono estendibili ad applicazioni generiche. Si consideri ad esempio la curva piana in Fig. 37, con il lato rivolto verso l'interno della cuspide. Identifichiamo la sfera $\mathbf{S}^2$ con $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, la compattificazione

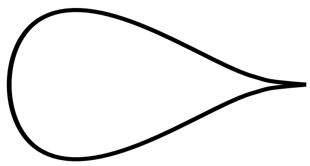


Fig. 37

di Alexandroff del piano. Non è difficile vedere che se X è un campo con un unico zero in ∞, allora $R_X(f) = 1$ e quindi $2R_X(f) - c = 1$. D'altra parte è facile vedere che non esiste alcuna applicazione di $\mathbb{RP}^2$ (l'unica superficie con caratteristica di Eulero 1) in $\mathbf{S}^2$, che abbia tale curva come contorno apparente e tale che $F^{-1}(\infty) = \emptyset$.

Osservazione 2.3.6. Dalla Proposizione 2.3.4 si ritrova immediatamente un classico teorema di René Thom [**T**], che asserisce che la parità del numero delle cuspidi del contorno apparente di una applicazione generica $F : S \to \mathbb{R}^2$ è uguale alla parità della caratteristica di Eulero della superficie S, ossia, con le notazioni da noi introdotte:

$$\chi(S) \equiv c \qquad (\text{mod. } 2).$$

Questo segue dal fatto che una applicazione a valori in $\mathbb{R}^2$ può essere letta a valori nella sfera $\mathbf{S}^2$, tale che $F^{-1}(\infty) = \emptyset$ e per una tale applicazione si ha: $2R_X(f) - c = \chi(S) - \beta\chi(\mathbf{S}^2) = \chi(S)$; da cui segue ovviamente la tesi.

Sempre da Proposizione 2.3.4 è immediato dedurne un rafforzamento del già citato teorema di Thom:

Teorema 2.3.7. *Sia $F : S \to \mathbf{N}$ un'applicazione generica, allora: $\chi(S) \equiv c$ (mod. 2) se e solo se o $\chi(\mathbf{N})$ è pari, oppure $\deg_2(F) = 0$; dove $\deg_2$, indica il grado modulo due.*

Dim: Sia ∞ un fissato punto in $\mathbf{N} - \Gamma$. Dalla relazione in Proposizione 2.3.4 segue immediatamente che $\chi(S) \equiv c \quad (\text{mod. } 2)$ se e solo se $\beta\chi(\mathbf{N})$ è pari; ossia se e solo se $\chi(\mathbf{N})$ o β è pari. D'altra parte, visto che ∞ è un valore regolare per F, per definizione di grado modulo due si ha che $\beta = \#F^{-1}(\infty)$ è pari se e solo se $\deg_2(F) = 0$; ossia la tesi. ❏

Per una definizione di grado modulo due si veda ad esempio [**Mil**].

2.4. Parola di una curva con cuspidi

Definizione 2.4.1. *Sia $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ una k–curva con cuspidi e sia $\infty \in \mathbf{N}$ un punto fissato, non appartenente al supporto Γ di f; chiameremo insieme di segmenti* *per* f *un insieme di archi lisci* $R = A \cup B \cup \Omega$, *con* $A = \{\alpha_i\}_{i \in I}$, $B = \{\beta_i\}_{i \in I'}$ *e* $\Omega = \{\omega_i\}_{i \in I''}$ *tali che:*

(1) *ogni* $\alpha_i \in A$ *è un arco orientato in* $\mathbf{N}$, *diffeomorfo ad un intervallo chiuso della retta reale con il punto iniziale in una componente connessa di* $\mathbf{N} - \Gamma$, *ed il punto finale in* ∞*;*

(2) *ogni* $\beta_i \in B$ *è un arco orientato in* $\mathbf{N}$, *diffeomorfo ad un intervallo chiuso della retta reale con il punto iniziale in una cuspide di* Γ, *ed il punto finale in* ∞*;*

(3) *gli* ω_j *sono dei rappresentanti lisci (diffeomorfi ad* $\mathbf{S}^1$*) di un sistema minimale di generatori di* $\pi_1(\mathbf{N}, \infty)$*;*

(4) *due archi diversi si intersecano soltanto in* ∞*;*

(5) *gli archi* $r \in R$ *sono in posizione generica rispetto a* Γ, *ovvero:*

   i) ogni arco α_i *ed* ω_i *è trasversale a* Γ *ed ogni* β_i *è trasversale a* Γ *tranne, ovviamente, nel punto di partenza;*

   ii) i β_i *sono diretti verso l'esterno della cuspide da cui partono;*

   iii) nessun arco di R *contiene incroci di* Γ.

Diremo che R *è un sistema di segmenti per* f *se in più:*

(6) *da ogni componente connessa limitata di* $\mathbf{N} - \Gamma$ *parte almeno un arco* α_i *e da ogni cuspide parte almeno un arco* β_i.

Denoteremo indifferentemente con R, A, B ed Ω sia gli insiemi di archi appena definiti sia gli insiemi definiti dei punti che costituiscono tali archi.

Supponiamo ora che la curva f abbia un lato, non necessariamente coerente, conveniamo di chiamare sinistra della curva la parte marcata dal lato.

Definizione 2.4.2. *Sia* $r \in R$, *un punto di* $r \cap \Gamma$, *che non sia una cuspide, sarà detto positivo se il segmento* r *attraversa la curva da sinistra verso destra; sarà invece detto negativo nell'altro caso. I punti di cuspide saranno detti positivi o negativi concordemente a Definizione 2.1.3.*

Analogamente a quanto fatto in §1.9, fissiamo un intorno, U_∞, di ∞ che non contenga punti di Γ, per ogni $r \in R$ fissiamo un intorno orientabile, U_r, di $r - U_\infty$ in $\mathbf{N} - U_\infty$ sul quale scegliamo una orientazione ed assegniamo dei nomi $x^e_{i,j,\mu}$ ai punti di $(A \cup \Omega) \cap \Gamma$, $y^e_{i,j,\mu}$ ai punti di $B \cap \Gamma$ con le stesse regole usate in §1.9. eccetto per il primo punto di $\beta_i \cap \Gamma$, per il quale conveniamo che:

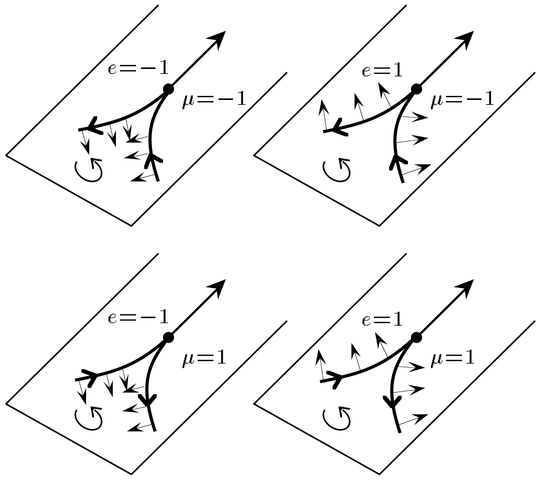


Fig. 38

> il segno ausiliario μ sia positivo o negativo, secondo che la curva attraversi il segmento da sinistra a destra o da destra a sinistra,

ovvero per i punti di cuspide la convenzione per l'assegnazione del segno μ è l'opposto di quella per tutti gli altri punti. (cfr Fig. 22 di §1.9 e Fig. 38)

Alla k–curva con cuspidi f si associa quindi un insieme di k parole, nelle lettere $x^e_{i,j,\mu}$, $y^e_{i,j,\mu}$, con lo stesso procedimento usato per le curve con solo nodi (cfr. §1.9).

Definizione 2.4.3. *Chiameremo k–parola della k–curva con cuspidi f, rispetto all'insieme di segmenti R, l'insieme $w = \{w_1, \dots, w_k\}$ ottenuto con tale procedimento.*

Osservazione 2.4.4. Chiaramente, la k–parola di una k–curva con cuspidi dipende dalla scelta dei punti base (la scelta di un diverso punto base sulla componente Γ_h altera la parola w_h per l'azione di una permutazione ciclica) ed ancor più dalla scelta dell'insieme di segmenti; quindi, quando si parlerà di "parola di una curva" si sottintenderà "rispetto ad un fissato insieme di segmenti ed a meno di permutazioni cicliche".

Siano $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ una curva con cuspidi e w una sua parola. Sia $D \subseteq \mathcal{C}$ un sottoinsieme dell'insieme delle cuspidi.

Definizione 2.4.5. *Chiameremo D–deformazioni di primo e secondo tipo di w rispettivamente le parole $w^*_D = \{w^*_{D,1}, w^*_{D,2}\}$ e $w^{**}_D = w^*_{D,1} w^*_{D,2}$, dove $w^*_{D,1}$ è ottenuta* *da w cancellando tutte le lettere $y^e_{i,1,\mu}$ corrispondenti ai segmenti β_i uscenti dalle cuspidi in D, e $w^*_{D,2}$ è ottenuta da w cancellando tutte le altre lettere $y^e_{i,1,\mu}$.*

Siano $f : \coprod_{h=1}^k \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ una k–curva con cuspidi, $w = \{w_1, \ldots, w_k\}$ una k–parola per f, $D \subseteq \mathcal{C}$ un sottoinsieme dell'insieme delle cuspidi ed infine $H = \{H_1, H_2\}$ una partizione dell'insieme $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Definizione 2.4.6. *Chiameremo (D, H)–deformazione di w la k_H–parola*

$$w_{(D,H)} = \big\{(w_h)^*_D \;\big|\; h \in H_1\big\} \coprod \big\{(w_h)^{**}_D \;\big|\; h \in H_2\big\},$$

essendo $k_H = 2\#H_1 + \#H_2$, come in Definizione 2.2.3.

Osservazione 2.4.7. Dato un sistema di segmenti R, osserviamo che, per ogni coppia di deformazione (D, H) come sopra, i segmenti di R verificano le condizioni (1) – (4) di Definizione 1.9.1 relativamente alla (D, H)–deformazione $f_{(D,H)}$ della k–curva con cuspidi f, o meglio, la deformazione può essere effettuata in modo che R verifichi tali proprietà, cosa questa che d'ora in poi supporremo sempre di fare, e quindi R è un insieme di segmenti per $f_{(D,H)}$. L'unica cosa che impedisce ad R di essere un sistema di segmenti per $f_{(D,H)}$, è che da qualche componente connessa limitata di $\mathbf{N} - \Gamma_{(D,H)}$ non parte alcunun segmento di R. Vedremo nella prossima sezione che, in ogni caso, R risulta essere un sistema di segmenti ridotto per $f_{(D,H)}$ (cfr. Definizione 1.12.1 e Proposizione 2.5.3).

2.5. Assemblaggi ed enunciato del Teorema di estensione

Definizione 2.5.1. *Siano $f : \coprod_{h=1}^k \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ una k–curva con cuspidi, R un insieme di segmenti per f e $w = \{w_1, \ldots, w_k\}$ una k–parola per f. Chiameremo β–assemblaggio per w una coppia $\mathbf{A} = \big((D, H), \mathfrak{A}\big)$ dove (D, H) è una coppia di deformazione ed $\mathfrak{A}$ è un β–assemblaggio per $w_{(D,H)}$ nel senso dato dalla Definizione 1.9.7 del capitolo precedente. Denoteremo con $\mathcal{A}^\beta(w)$ l'insieme dei β–assemblaggi di w.*

Notiamo che nella parola deformata $w_{(D,H)}$ tutte le lettere $x^e_{i,j,\mu}$ ed $y^e_{i,j,\mu}$, tranne le lettere $y^e_{i,1,\mu}$, compaiono esattamente due volte. Nella definizione precedente ed in quanto segue, queste due copie della stessa lettera devono essere considerate come due lettere distinte.

Definizione 2.5.2. *Dato un β–assemblaggio $\mathbf{A} = \big((D,H),\mathfrak{A}\big)$ chiameremo grafo associato ad $\mathbf{A}$ il $(k_H+\beta)$–grafo circolare pesato $G(\mathbf{A}) = G(\mathfrak{A})$ (cfr. Definizione 1.9.8).*

Chiameremo rispettivamente numero di componenti, genere e genere pesato di $\mathbf{A}$ i numeri:

$$l(\mathbf{A}) = l\big(G(\mathbf{A})\big) = l(\mathfrak{A}), \quad g(\mathbf{A}) = g\big(G(\mathbf{A})\big) = g(\mathfrak{A}), \quad h(\mathbf{A}) = h\big(G(\mathbf{A})\big) = h(\mathfrak{A}).$$

(Cfr. Definizione 1.9.9 e §1.8).

Vediamo ora in che modo gli assemblaggi appena definiti sono legati agli assemblaggi definiti per parole di curve generiche.

Proposizione 2.5.3. *R è un sistema ridotto di segmenti per $f_{(D,H)}$* (cfr. §1.12 e §2.2).

DIM: Abbiamo già visto in Osservazione 2.4.7, che i segmenti di R sono in posizione generica rispetto a $f_{(D,H)}$ e quindi R è un insieme di segmenti per $f_{(D,H)}$ (cfr. Definizione 1.9.1). Osserviamo ora che le componenti connesse di $\mathbf{N} - \Gamma_{(D,H)}$ sono essenzialmente quelle di $\mathbf{N} - \Gamma$, da cui parte sicuramente un segmento di R, più quelle generate dalla deformazione che sono di tre tipi:

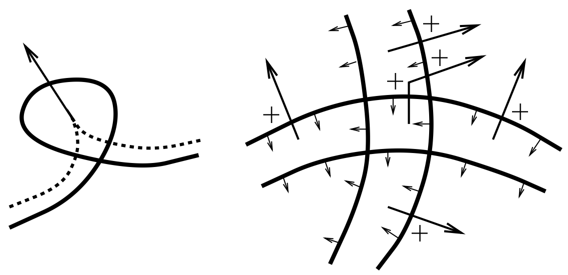


Fig. 39

(1) comprese tra due rami paralleli;
(2) comprese tra due coppie trasversali di rami paralleli;
(3) delimitate dall'occhiello attorno alle cuspidi.

Osserviamo che dalle componenti del terzo tipo parte il segmento uscente dalla cuspide corrispondente, dalle altre, invece, non parte nessun segmento; tuttavia, dato che tali componenti sono delimitate da rami paralleli di $f_{(D,H)}$ aventi il lato rivolto dalla stessa parte, è possibile uscirne con una prima intersezione positiva (vedi Fig. 39). ∎

Osservazione 2.5.4. Sia $\widetilde{w}_{(D,H)}$ la parola per $f_{(D,H)}$ determinata dal sistema ridotto di segmenti R. È immediato verificare che $\widetilde{w}_{(D,H)}$ è ottenuta da $w_{(D,H)}$ rinumerando i secondi indici delle lettere in modo che le due lettere uguali in $w_{(D,H)}$, abbiano i secondi indici consecutivi e che venga mantenuto l'ordine preesistente, nel senso che due lettere con primo indice uguale e secondi indici uno minore dell'altro, avranno ancora lo stesso primo indice e secondi indici uno minore dell'altro.

Osserviamo allora che se $\mathbf{A} = \big((D,H),\mathfrak{A}\big)$ è un β–assemblaggio per la parola w, l'insieme $\mathfrak{A}$ definisce in modo ovvio un β–assemblaggio $\widetilde{\mathfrak{A}}_{\mathbf{A}}$ per la parola $\widetilde{w}_{(D,H)}$ che ha stesso genere e stesso numero di componenti di $\mathbf{A}$, d'altra parte, visto che le lettere, che in $w_{(D,H)}$ hanno stessi indici, hanno ovviamente anche lo stesso esponente, le corrispondenti lettere di $\widetilde{w}_{(D,H)}$ non possono essere appaiate da nessun β–assemblaggio. In altre parole vale la seguente:

Proposizione 2.5.5. *L'applicazione $\mathbf{A} \mapsto \widetilde{\mathfrak{A}}_{\mathbf{A}}$ mette in bigezione i β–assemblaggi di w della forma $\big((D,H),\mathfrak{A}\big)$ con gli assemblaggi di $\widetilde{w}_{(D,H)}$, ed in più $\mathbf{A}$ ed $\widetilde{\mathfrak{A}}_{\mathbf{A}}$ hanno stesso genere e stesso numero di componenti.*

Come corollario si ha la seguente proposizione:

Proposizione 2.5.6. *Sia $f : \coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ una curva con cuspidi, siano w una parola per f ed $\mathbf{A} = \big((D,H),\mathfrak{A}\big)$ un β–assemblaggio per w. Allora:*

$$2R(f) - c_- + c_+ \geq 2l(\mathbf{A}) - k_H - h(\mathbf{A}) - \beta\chi(\mathbf{N}).$$

DIM: Dall'osservazione precedente e da Proposizione 1.10.20, che, in virtù di Osservazione 1.12.10, si applica ai β–assemblaggi di $\widetilde{w}$, si ha:

$$R(f_{(D,H)}) \geq 2l(\widetilde{\mathfrak{A}}_{\mathbf{A}}) - k_H - h(\widetilde{\mathfrak{A}}_{\mathbf{A}}) - \beta\chi(\mathbf{N}).$$

Si conclude quindi, usando Lemma 2.3.3. ∎

Definizione 2.5.7. *Un β–assemblaggio per w sarà detto minimale, se e solo se:*

$$2R(f) - c_- + c_+ = 2l(\mathbf{A}) - k_H - h(\mathbf{A}) - \beta\chi(\mathbf{N}).$$

Denoteremo con $\mathcal{A}_m^\beta(w)$ l'insieme dei β–assemblaggi minimali di w.

Da Osservazione 2.5.4 e Proposizione 2.5.5 seguono evidentemente le proposizioni:

Proposizione 2.5.8. *Un β–assemblaggio $\mathbf{A}$ è minimale se e solo se $\widetilde{\mathfrak{A}}_{\mathbf{A}}$ è minimale.*

Proposizione 2.5.9. *L'applicazione $\mathbf{A} \mapsto \widetilde{\mathfrak{A}}_{\mathbf{A}}$ mette in corrispondenza biunivoca i β–assemblaggi minimali di w del tipo $\mathbf{A} = \big((D,H), \mathfrak{A}\big)$ con i β–assemblaggi minimali della parola $\widetilde{w}_{(D,H)}$.*

Sia w una k–parola per $f : \coprod_{h=1}^k \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$, e supponiamo che la componente h–esima di f non contenga cuspidi (che sulla parola w si legge dal fatto che w_h non contiene nessuna lettera $y_{i,1}^e$). Sia (D,H) una coppia di deformazione e sia $w_{(D,H)}$ la parola deformata. Osserviamo allora che $(w_h)_{D,1}^* = (w_h)_{D,2}^* = w_h$, possiamo pertanto considerare l'involuzione:

$$\iota_h : \{\text{lettere di } w_{(D,H)}\} \longrightarrow \{\text{lettere di } w_{(D,H)}\}$$

che scambia tutte le lettere di $(w_h)_{D,1}^*$ con quelle di $(w_h)_{D,2}^*$ e lascia ferme tutte le altre.

Se $\mathbf{A} = \big((D,H), \mathfrak{A}\big)$ è un β–assemblaggio per w, indicheremo con $\iota_h \mathbf{A}$ il β–assemblaggio definito dalla coppia $\big((D,H), \iota_h \mathfrak{A}\big)$ dove

$$\iota_h \mathfrak{A} = \big\{\{\iota_h(z_{i,j,\mu}^{-1}), \iota_h(z_{i,j',\mu'})\} \bigm| \{z_{i,j,\mu}^{-1}, z_{i,j',\mu'}\} \in \mathfrak{A}\big\}.$$

Definizione 2.5.10. *Due β–assemblaggi $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}' \in \mathcal{A}^\beta(w)$ saranno detti ι–equivalenti se e solo se esistono involuzioni $\iota_{h_1}, \ldots, \iota_{h_n}$ tali che:*

$$\mathbf{A}' = \iota_{h_n} \ldots \iota_{h_1} \mathbf{A}.$$

Denoteremo con il simbolo $\mathbf{A} \overset{\iota}{\sim} \mathbf{A}'$ *la relazione di* ι*–equivalenza.*

Definizione 2.5.11. *Due* β*–assemblaggi* $\mathbf{A} = \big((D,H),\mathfrak{A}\big)$ *ed* $\mathbf{A}' = \big((D',H'),\mathfrak{A}'\big)$ *saranno detti* δ*–equivalenti se e solo se* D' *è ottenuto da* D *come in Osservazione 2.2.4 ed* $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$*. Denoteremo con il simbolo* $\mathbf{A} \overset{\delta}{\sim} \mathbf{A}'$ *la relazione di* δ*–equivalenza. Denotermo, inoltre, con il simbolo* $\overset{\iota\delta}{\sim}$ *la relazione generata dalla* δ *e dalla* ι *equivalenza.*

Evidentemente, analogamente a quanto visto in §1.9, anche sull'insieme $\mathcal{A}^\beta(w)$ dei β–assemblaggi di w si ha un'azione del gruppo simmetrico $\mathfrak{S}_\beta$, e precisamente ponendo $\sigma\mathbf{A} = \big((D,H),\sigma\mathfrak{A}\big)$, per ogni β–assemblaggio $\mathbf{A} = \big((D,H),\mathfrak{A}\big)$ di w (cfr. §1.9).

Osservazione 2.5.12. È evidente che dati due assemblaggi $\mathbf{A} \overset{\iota\delta}{\sim} \mathbf{A}'$, allora $\mathbf{A}$ è minimale, se e solo se $\mathbf{A}'$ è minimale, e che un assemblaggio $\mathbf{A}$ è minimale se e solo se anche $\sigma\mathbf{A}$ lo è, per ogni $\sigma \in \mathfrak{S}_\beta$ (cfr. 1.9.11). Quindi la relazione $\overset{\iota\delta}{\sim}$ e l'azione di $\mathfrak{S}_\beta$ possono essere considerate ristrette a $\mathcal{A}^\beta_m(w)$.

Definizione 2.5.13. *Chiamiamo equivalenza, e la denoteremo con* $\sim$*, la relazione d'equivalenza sull'insiame* $\mathcal{A}^\beta_m(w)$ *generata dall'azione di* $\mathfrak{S}_\beta$ *e dalla relazione* $\overset{\iota\delta}{\sim}$*.*

Detto $E^\beta(f)$ l'insieme delle estensioni generiche F di f tali che $F^{-1}(\infty)$ è costituito da β punti, dimostreremo il seguente teorema:

Teorema (di estensione) 2.5.14. *Sia* $f : \coprod_{h=1}^k \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$ *una* k*–curva con cuspidi e nodi e sia* w *una parola definita a partire da un sistema di segmenti per* f*. Allora l'insieme* $E^\beta(f)/_{\text{r-equivalenza}}$ *è in bigezione con l'insieme* $\mathcal{A}^\beta_m(w)/_\sim$ *dei* β*–assemblaggi minimali di* w*, modulo equivalenza.*

Prima di dimostrare il teorema, premettiamo alcune considerazioni del tutto elementari.

Proposizione 2.5.15. *Siano* $\mathbf{A}$*,* $\mathbf{A}' \in \mathcal{A}^\beta(w)$*, tali che* $\mathbf{A} \overset{\iota}{\sim} \mathbf{A}'$ *e* $\sigma \in \mathfrak{S}_\beta$*. Allora:*

$$\sigma\mathbf{A} \overset{\iota}{\sim} \sigma\mathbf{A}'.$$

DIM: Siano $\iota_{h_1}, \ldots, \iota_{h_n}$ tali che $\iota_{h_n} \ldots \iota_{h_1}\mathbf{A} = \mathbf{A}'$, allora, dato che le involuzioni ι_h agiscono in modo non banale soltanto su lettere della parola $w_{(D,H)}$ mentre la permutazione σ agisce in modo non banale soltanto su lettere delle parole $u_1, \ldots, u_\beta$ che formano la β–espansione di $w_{(D,H)}$ (cfr. §1.9), risulta evidentemente che:

$$\sigma \mathbf{A}' = \sigma \iota_{h_n} \ldots \iota_{h_1} \mathbf{A} = \iota_{h_n} \ldots \iota_{h_1} \sigma \mathbf{A}.$$

Da cui la tesi. ▮

Proposizione 2.5.16. *Siano* $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}' \in \mathcal{A}^\beta(w)$, *tali che* $\mathbf{A} \overset{\delta}{\sim} \mathbf{A}'$ *e* $\sigma \in \mathfrak{S}_\beta$. *Allora:*

$$\sigma \mathbf{A} \overset{\delta}{\sim} \sigma \mathbf{A}'.$$

Dim: Evidente dalle definizioni. ▮

Osservazione 2.5.17. Dalle due Proposizioni precedenti, segue che se $\mathbf{A} \overset{\iota\delta}{\sim} \mathbf{A}'$ allora anche $\sigma \mathbf{A} \overset{\iota\delta}{\sim} \sigma \mathbf{A}'$ per ogni $\sigma \in \mathfrak{S}_\beta$ e che:

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{A}' \iff \exists\ \sigma \in \mathfrak{S}_\beta : \sigma \mathbf{A} \overset{\iota\delta}{\sim} \mathbf{A}'. \tag{1}$$

Nel seguito denoteremo con lo stesso simbolo $\overset{\iota\delta}{\sim}$ anche la relazione d'equivalenza su $\mathcal{A}_m^\beta(w)/_{\mathfrak{S}_\beta}$, quoziente della relazione d'equivalenza $\sim$, che, per quanto appena osservato, è tale che:

$$[\mathbf{A}] \overset{\iota\delta}{\sim} [\mathbf{A}'] \iff \exists\ \sigma \in \mathfrak{S}_\beta : \sigma \mathbf{A} \overset{\iota\delta}{\sim} \mathbf{A}', \tag{2}$$

dove con $[\mathbf{A}]$ indichiamo la classe di $\mathbf{A}$ in $\mathcal{A}_m^\beta(w)/_{\mathfrak{S}_\beta}$.

Evidentemente risulta:

$$\mathcal{A}_m^\beta(w)/_\sim = \left(\mathcal{A}_m^\beta(w)/_{\mathfrak{S}_\beta}\right)\Big/_{\overset{\iota\delta}{\sim}}.$$

Osservazione 2.5.18. Sia $w_{(D,H)}$ una deformazione di w e sia $\widetilde{w}_{(D,H)}$ la parola per $f_{(D,H)}$ determinata dal sistema di segmenti ridotto per $f_{(D,H)}$, R. Sia $\mathbf{A} \in \mathcal{A}_m^\beta(w)$ un assemblaggio della forma $\big((D,H), \mathfrak{A}\big)$ e sia $\widetilde{\mathfrak{A}}_\mathbf{A} \in \mathcal{A}_m^\beta(\widetilde{w}_{(D,H)})$ l'assemblaggio corrispondente (cfr. 2.5.4). Dalle definizioni segue immediatamente che per ogni $\sigma \in \mathfrak{S}_\beta$ e per ogni $\mathbf{A} \in \mathcal{A}^\beta(w)$ risulta $\sigma \widetilde{\mathfrak{A}}_A = \widetilde{\mathfrak{A}}_{\sigma\mathbf{A}}$.

Da questo fatto si deduce allora che l'applicazione $\widetilde{\mathfrak{A}}$ passa a quoziente definendo una applicazione:

$$[\widetilde{\mathfrak{A}}] : \mathcal{A}_m^\beta(w)/_{\mathfrak{S}_\beta} \longrightarrow \bigcup_{(D,H)} \left(\mathcal{A}_m^\beta(\widetilde{w}_{(D,H)})/_{\mathfrak{S}_\beta}\right)$$
$$[\widetilde{\mathfrak{A}}] : [\mathbf{A}] \longmapsto [\widetilde{\mathfrak{A}}]_{[\mathbf{A}]} = [\widetilde{\mathfrak{A}}_{\mathbf{A}}]$$

essendo l'unione estesa a tutte le coppie di deformazione, e tale applicazione risulta ovviamente essere una bigezione.

2.6. Dimostrazione del Teorema di estensione

Definiamo innanzitutto un'applicazione:

$$\mathbf{A}_1^\beta : E^\beta(f) \longrightarrow \mathcal{A}_m^\beta(w)/_{\mathfrak{S}_\beta}.$$

Sia $F : S \to \mathbf{N}$ una estensione generica di $f : \coprod_{h=1}^k \mathbf{S}^1 \to \mathbf{N}$; fissiamo un intorno tubolare U del luogo critico di F, $\coprod_{h=1}^k \mathbf{S}^1 \subset S$, tale che $f|_{\partial(S-U)} = f_{(D,H)}$ per una opportuna scelta (non unica) di D ed H. $F|_{(S-U)}$ è una immersione che estende $f_{(D,H)}$ e che assume il valore ∞ esattamente β volte. Con le notazioni usate in §1.11, sia $\mathfrak{A}_2^\beta(F) \in \mathcal{A}_m^\beta(\widetilde{w}_{(D,H)})/_{\mathfrak{S}_\beta}$ la classe di assemblaggi associata ad $F|_{(S-U)}$.

Poniamo $\mathbf{A}_1^\beta(F) \in \mathcal{A}_m^\beta(w)/_{\mathfrak{S}_\beta}$ l'unica classe tale che:

$$[\widetilde{\mathfrak{A}}]_{\mathbf{A}_1^\beta(F)} = \mathfrak{A}_2^\beta(F),$$

(cfr. Osservazione 2.5.18).

Osserviamo che tale costruzione non è univoca ma dipende da alcune scelte:

(1) la scelta dell'intorno tubolare;
(2) la scelta dell'insieme di deformazione;
(3) se f_h è una componente di f senza cuspidi, detta U_h la componente di U contenente la h–esima circonferenza, da quale dei due rami di ∂U_h si sceglie per giocare il ruolo di dominio di $f^*_{h,D,1}$.

Vedremo tra breve che in ogni caso, questa costruzione effettuata con scelte diverse, produce classi equivalenti rispetto alla relazione $\overset{\iota\delta}{\sim}$, definendo in tal modo, per quanto osservato in Osservazione 2.5.17, un'applicazione:

$$\mathbf{A}_2^\beta : E^\beta(f) \longrightarrow \mathcal{A}_m^\beta(w)/\sim.$$

Per fare questo descriviamo più esplicitamente la costruzione precedente.

Sia $\{p_1, \ldots, p_\beta\} = F^{-1}(\infty)$, e siano $D_1, \ldots, D_\beta \subset S$ dei dischi tali che per ogni i $p_i \in D_i$ ed $F(\partial D_i) = g_i(\mathbf{S}_1)$, essendo $g_1, \ldots, g_\beta$ le curve che danno la β–espansione (cfr. §1.9). Indichiamo con Σ^β l'insieme $\Sigma \cup \bigcup_{i=1}^{\beta} \partial D_i$, essendo $\Sigma = \coprod_{h=1}^k \mathbf{S}^1$ il luogo critico dell'applicazione F.

Dato che i segmenti di R sono in posizione generica rispetto a Γ (cfr. condizione (5) di Definizione 2.4.1), $\big(F\big|_{(S-\bigcup \overset{\circ}{D}_i)}\big)^{-1}(R)$ è costituito da archi lisci che hanno almeno un estremo su Σ^β. Diamo agli estremi di tali archi lo stesso nome ($x^e_{i,j,\mu}$ o $y^e_{i,j,\mu}$) della sua immagine tramite F.

Sia U l'intorno tubolare di Σ usato nella costruzione precedente, e sia γ un arco di $\big(F\big|_{(S-\bigcup \overset{\circ}{D}_i)}\big)^{-1}(R)$. Chiaramente γ interseca ∂U in tanti punti quanti sono i suoi estremi su Σ. Diamo a tali punti lo stesso nome del corrispondente estremo di γ. Leggendo consecutivamente i nomi dei punti su ∂U si ottiene esattamente la parola $w_{(D,H)}$, mentre leggendo i nomi di quelli sui ∂D_i si ottengono le parole $u_1, \ldots, u_\beta$ che danno la β–espansione di $w_{(D,H)}$ (cfr. §1.9).

Accoppiando tra loro le lettere corrispondenti agli estremi di uno stesso arco, si ottiene allora un β–assemblaggio per la parola $w_{(D,H)}$.

Dal modo come si era definito l'assemblaggio indotto da una immersione (cfr. §1.11) è evidente che l'assemblaggio così costruito è un rappresentante della classe in $\mathbf{A}_1^\beta(F) \in \mathcal{A}_m^\beta(w)/\mathfrak{S}_\beta$ costruita all'inizio di questa sezione.

Da questa esplicitazione della costruzione di $\mathbf{A}_1(F)$ appare evidente che, fissati U e l'insieme di deformazione D, ma scambiando i ruoli dei due rami di ∂U_h, essendo U_h come in (3), l'assemblaggio costruito nel secondo modo, cambia per una involuzione di tipo ι.

È altrettanto chiaro che con la stessa scelta di U e la stessa scelta di ruoli per i due rami di ∂U_h, ma variando l'insieme di deformazione, si ottengono assemblaggi δ–equivalenti.

Siano invece U e U' due diversi intorni di Σ, possiamo definire una applicazione J dall'insieme delle lettere di $w_{(D,H)}$ in sé, semplicemente associando ad ogni lettera rappresentata dall'intersezione di un arco γ con ∂U la lettera rappresentata dalla corrispondente intersezione di γ con $\partial U'$. Osserviamo che allora gli assemblaggi costruiti a partire dai due diversi intorni sono ottenuti l'uno dall'altro per l'azione di questa applicazione J; più precisamente, se $\mathbf{A} = \big((D,H),\mathfrak{A}\big)$ ed $\mathbf{A}' = \big((D,H),\mathfrak{A}'\big)$ sono gli assemblaggi costruiti a partire da U e da U', si ha che:

$$\mathfrak{A}' = \big\{(J(z^{-1}_{i,j,\mu}), J(z_{i,j',\mu'})\} \bigm| \{z^{-1}_{i,j,\mu}, z_{i,j',\mu'}\} \in \mathfrak{A}\big\}.$$

Non è difficile vedere che su tutte le componenti della parola $w_{(D,H)}$ che contengono delle cuspidi, o meglio che sono deformazione di componenti contenenti delle cuspidi, tale applicazione J è necessariamente l'identità mentre sulle componenti che sono deformazione di parole che non contengono cuspidi J o è l'identità o è una involuzione del tipo ι; quindi gli assemblaggi costruiti a partire da U e da U' sono δ–equivalenti.

Da quanto detto fino ad ora, e per quanto osservato in fine alla precedente sezione, possiamo asserire che, scelte differenti nella costruzione iniziale producono classi, in $\mathcal{A}^{\beta}_m(w)/_{\mathfrak{S}_\beta}$, equivalenti rispetto a $\overset{\iota\delta}{\sim}$. Ovvero la costruzione illustrata definisce un'applicazione:

$$\mathbf{A}^{\beta}_2; E^{\beta}(f) \longrightarrow \mathcal{A}^{\beta}_m(w)/\sim.$$

Proposizione 2.6.1. *Se $F, F' \in E(f)$ sono due estensioni r–equivalenti allora:*

$$\mathbf{A}^{\beta}_2(F) = \mathbf{A}^{\beta}_2(F').$$

DIM: Evidente dalle definizioni. ∎

Ma allora l'applicazione $\mathbf{A}^{\beta}_2$ passa a quoziente e definisce una applicazione:

$$\mathbf{A} : E(f)\Big/_{\text{r–equivalenza}} \longrightarrow \mathcal{A}^{\beta}_m(w)/\sim.$$

Teorema 2.6.2. *L'applicazione* $\mathbf{A}$*, qui sopra definita, è biunivoca.*

DIM: Dimostriamo che $\mathbf{A}$ è iniettiva. Siano $F : S \to \mathbf{N}$ ed $F' : S' \to \mathbf{N}$ tali che $\mathbf{A}(F) = \mathbf{A}(F')$. Allora, in particolare, F ed F' inducono la stessa coppia di deformazione (D, H) e quindi per Proposizione 2.2.11, esistono due intorni tubolari U di $\coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1$ in S ed U' di $\coprod_{h=1}^{k} \mathbf{S}^1$ in S' ed un diffeomorfismo $\varphi_1 : U' \to U$ tali che $F'|_{U'} = (F|_U) \circ \varphi_1$.

Ma ora, per come abbiamo costruito l'applicazione $\mathbf{A}$, $F\big|_{(S-U)}$ e $F'\big|_{(S'-U')}$ sono due estensioni della stessa curva $f_{(D,H)}$ che inducono la stessa classe di β–assemblaggi in $\mathcal{A}_m^{\beta}(\widetilde{w}_{(D,H)})\big/_{\mathfrak{S}_\beta}$ e pertanto, dato che $\widetilde{w}_{(D,H)}$ è una parola per $f_{(D,H)}$ definita da un sistema di segmenti ridotto (cfr. Proposizione 2.5.3), per il Teorema 1.12.12, sono equivalenti a destra, ovvero esiste un diffeomorfismo $\varphi_2 : (S' - U') \to (S - U)$ tale che $F'\big|_{(S'-U')} = F\big|_{(S-U)} \circ \varphi_2$.

Da una analisi locale si vede facilmente che i due diffeomorfismi si incollano per definire un diffeomorfismo $\varphi : S' \to S$ tale che $F' = F \circ \varphi$.

Dimostriamo ora che $\mathbf{A}$ è surgettiva. Per prima cosa dimostriamo la seguente proposizione:

Proposizione 2.6.3. *Se* w *ha* β*–assemblaggi minimali allora le cuspidi di* f *sono tutte negative.*

DIM: Supponiamo per assurdo che f abbia una cuspide positiva, allora ogni deformazione $f_{(D,H)}$ di f avrà un occhiello positivo (cfr. Definizione 1.12.13). Ma allora dal Lemma 1.12.15 ne segue che $\mathcal{A}_m^{\beta}(\widetilde{w}_{(D,H)}) = \varnothing$.

Dato che, coma si è visto nella sezione precedente, quest'ultimo insieme è in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei β–assemblaggi di w della forma $\big((D, H), \mathfrak{A}\big)$, per l'arbitrarietà della coppia di deformazione (D, H) in questo ragionamento si deduce che allora $\mathcal{A}_m^{\beta}(w) = \varnothing$ per ogni β, che è contro l'ipotesi. ∎

Sia allora $\mathbf{A} = \big((D, H), \mathfrak{A}\big)$ un assemblaggio minimale per w, per la proposizione appena dimostrata, f ha un lato coerente, quindi da Lemma 2.2.6 e Lemma 2.2.7 segue che esiste un'estensione generica F_1 di f, definita su una unione disgiunta di k cilindri e nastri di Moebious, che induce la coppia di deformazione (D, H) e tale che

F_1 ristretta al bordo di tale unione disgiunta è del tipo $f_{(D,H)}$.

Ma allora, per Proposizione 2.5.9, $\widetilde{\mathfrak{A}}_{\mathbf{A}}$ è un β–assemblaggio minimale per la parola $\widetilde{w}_{(D,H)}$ e per tanto, sempre per il Teorema 1.12.12, esistono una superficie compatta con k_H componenti di bordo $\widetilde{S}$ ed una immersione $F_2 : \widetilde{S} \to \mathbf{N}$ che estende $f_{(D,H)}$ ed induce esattamente la classe del β–assemblaggio $\widetilde{\mathfrak{A}}_{\mathbf{A}}$. Non è allora difficile vedere che incollando per il bordo questa superficie con l'unione disgiunta di cilindri e nastri di Moebious, si ottengono una superficie compatta S ed una applicazione generica $F : S \to \mathbf{N}$ che induce esattamente l'assemblaggio $\mathbf{A}$.

Con questo si conclude la dimostrazione del Teorema di estensione. ❑

Capitolo 3: Fattorizzazione di applicazioni generiche tra superficie

Siano date due superficie compatte S ed $\mathbf{N}$ ed un fibrato vettoriale $\mathbf{E} \xrightarrow{\pi} \mathbf{N}$ di rango 1 su $\mathbf{N}$; sia $F : S \to \mathbf{N}$ una applicazione generica. In questo capitolo ci occuperemo del problema di fattorizzare una tale applicazione mediante una applicazione $\widetilde{F} : S \to \mathbf{E}$ seguita dalla proiezione π, ovvero si cerca una $\widetilde{F}$ che faccia commutare il seguente diagramma:

(D1)
$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\widetilde{F}"] \arrow[d, equal] & \mathbf{E} \arrow[d, "\pi"] \\ S \arrow[r, "F"'] & \mathbf{N} \end{tikzcd}$$

Chiaramente, posto in questi termini, il problema ha sempre una soluzione banale, basta considerare l'inclusione $\mathbf{N} \overset{i_0}{\hookrightarrow} \mathbf{E}$ data dalla sezione nulla del fibrato e quindi prendere $\widetilde{F} = i_0 \circ F$.

Si cercherà allora $\widetilde{F}$ in modo che abbia delle proprietà aggiuntive. In particolare ci preoccuperemo di trovare una tale $\widetilde{F}$ che sia o una immersione (cfr. §3.1 e §3.2) oppure un embedding (cfr. §3.3 e §3.5).

Osserviamo che tale problema nasce in modo molto naturale nel caso che il fibrato $\mathbf{E}$ sia banale e la superficie $\mathbf{N}$ sia il piano (visto come la sfera $\mathbf{S}^2$ meno il punto all'infinito), in quanto descrive matematicamente il problema di decidere se una data immagine piana possa essere o meno realizzata mediante la proiezione di una superficie immersa (risp. *embedded*) in $\mathbb{R}^3$. Vedremo in §3.2 che, oltre a questa, c'è un'altra situazione che si presenta naturalmente ed in cui il fibrato non è banale,

3.1. Fattorizzazione con immersioni

Siano S ed $\mathbf{N}$ due superficie compatte, senza bordo e sia $F : S \to \mathbf{N}$ una applicazione generica. Supponiamo di avere un fibrato vettoriale, differenziabile, $\mathbf{E} \xrightarrow{\pi} \mathbf{N}$ di rango 1 su $\mathbf{N}$.

Come preannunciato, in questa sezione ci preoccuperemo di trovare condizioni necessarie e sufficienti affinchè l'applicazione F sia fattorizzabile mediante una immersione in $\mathbf{E}$ seguita dalla proiezione π su $\mathbf{N}$.

Denotiamo come al solito con Σ il luogo dei punti critici di F e siano C una componente connessa di Σ ed $f_C = F|_C$.

Si possono definire i seguenti due fibrati vettoriali di rango 1 su C:

i) $\kappa_C : K_C \to C$ il fibrato dei nuclei di dF $(\kappa_C^{-1}(p) = \ker\big(dF(p)\big) \quad \forall\, p \in C)$;

ii) $f_C^*\pi : f^*E \to C$ il fibrato indotto da f_C.

Dimostreremo il seguente:

Teorema 3.1.1. *Esiste una immersione* $\widetilde{F} : \mathbf{S} \to \mathbf{E}$ *tale che* $F = \pi \circ \widetilde{F}$, *se e solo se per ogni componente connessa* C *di* Σ *la somma di Whitney:*

$$\kappa_C \oplus f_C^*\pi : K_C \oplus f^*E \longrightarrow C$$

è il fibrato banale.

Osservazione 3.1.2. Sia $\zeta : Z \to C$ un fibrato in rette su C, si definisca:

$$\varepsilon(\zeta) = \begin{cases} 1 & \text{se } \zeta \text{ è orientabile;} \\ -1 & \text{se } \zeta \text{ non è orientabile.} \end{cases}$$

Il numero appena definito non è altro che la prima classe di Stiefel–Witney del fibrato ζ, quando si identifichi $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ con il gruppo moltiplicativo $\{1, -1\}$.

È immediato verificare che la condizione data nel Teorema 3.1.1 è equivalente alla seguente condizione:

$$\varepsilon(\kappa_C)\varepsilon(f_C^*\pi) = 1; \tag{1}$$

ossia, o entrambi i due fibrati sono orientabili, oppure entrambi non lo sono.

Inoltre, se $c(C)$ denota il numero di punti di cuspide in C, e

$$\nu_C : N_C \longrightarrow C$$

denota il fibrato normale di C in S, per Lemma 1 in [**H**], si ha:

$$\varepsilon(\kappa_C) = (-1)^{c(C)}\varepsilon(\nu_C);$$

e quindi la condizione (1) si può rienunciare:

$$(-1)^{c(C)}\varepsilon(\nu_C)\varepsilon(f_C^*\pi) = 1. \tag{2}$$

Infine, osserviamo che, se $\pi : \mathbf{E} \to \mathbf{N}$ è il fibrato banale, allora $\varepsilon(f_C^*\pi) = 1$, e quindi la condizione (2) si riduce a:

$$(-1)^{c(C)}\varepsilon(\nu_C) = 1,$$

e quindi in questo caso il nostro teorema è evidentemente equivalente al seguente teorema, dovuto ad Haefliger [**H**] nel caso $\mathbf{N} = \mathbb{R}^2$ ed esteso al caso di $\mathbf{N}$ arbitraria da Millet [**Mi**] (vedi anche Èliašberg [**E**]):

Teorema 3.1.3. *Esite una fattorizzazione $F = \widetilde{F} \circ \pi$, con $\widetilde{F} : S \to \mathbf{N} \times \mathbb{R}$ una immersione, se e solo se per ogni componente C di Σ vale una delle seguenti due condizioni:*

i) il fibrato ν_C è orientabile e $c(C)$ è pari,

ii) il fibrato ν_C non è orientabile e $c(C)$ è dispari.

Osservazione 3.1.4. Osserviamo innanzitutto che, per definizione di fibrato indotto, trovare una applicazione $\widetilde{F} : S \to \mathbf{N}$ tale che $\pi \circ \widetilde{F} = F$ è equivalente a trovare una sezione del fibrato $F^*\pi : F^*\mathbf{E} \to \mathbf{S}$, indotto, via F, dal fibrato $\pi : \mathbf{E} \to \mathbf{N}$, si veda il seguente diagramma:

(D2)
$$\begin{array}{ccccc}
F^*\mathbf{E} & = & F^*\mathbf{E} & \xrightarrow{\pi^* F} & \mathbf{E} \\
{\scriptstyle F^*\pi}\downarrow & & {\scriptstyle \sigma}\uparrow & & \| \\
S & = & S & \xrightarrow{\widetilde{F}} & \mathbf{E} \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\
 & & S & \xrightarrow[F]{} & \mathbf{N}
\end{array}$$

e dato che una sezione di un fibrato è sempre una immersione, e l'insieme dei punti critici di π^*F è l'insieme $(F^*\pi)^{-1}(\Sigma)$, è evidente che se σ è una sezione del fibrato $F^*\pi : F^*\mathbf{E} \to \mathbf{S}$, allora:

$$\forall\, p \in \mathbf{S} - \Sigma \qquad d\big(\pi^* F \circ \sigma\big)(p) \qquad \text{è iniettivo.}$$

Detto alla buona, questo significa che "l'ostruzione" a far si che $\pi^*F \circ \sigma$ sia una immersione, è "concentrata" in un intorno di Σ.

Più precisamente, quanto osservato fino ad ora significa che per risolvere il nostro problema è sufficiente trovare una sezione σ_1 del fibrato $F^*\mathbf{E}|_V$ —restrizione di $F^*\mathbf{E}$ ad un intorno tubolare V di Σ— tale che $\pi^*F \circ \sigma_1$ sia una immersione; una estensione arbitraria, che evidentemente esiste sempre, di σ_1, ad una sezione σ del fibrato $F^*\mathbf{E}$, fornisce allora l'immersione desiderata.

Sia allora V un intorno tubolare di Σ, evidentemente V ha lo stesso numero di componenti connesse di Σ; sia U la componente di V contenente C. Chiaramente U è diffeomorfo al quoziente:

$$\begin{array}{ll}
\mathbb{R}^2\big/_{(x,y)\sim(x+1,y)} & \text{se } \varepsilon(\nu_C) = 1; \\
\mathbb{R}^2\big/_{(x,y)\sim(x+1,-y)} & \text{se } \varepsilon(\nu_C) = -1;
\end{array}$$

mediante un diffeomorfismo che applica la curva C sul quoziente della retta $\{y = 0\}$.

Lemma 3.1.5. *Il fibrato $F^*\pi : \big(F^*\mathbf{E}\big)\big|_U \to U$ è isomorfo ad uno dei seguenti quattro* *fibrati:*

(I) $\mathbb{R}^3/_{(x,y,z)\sim(x+1,y,z)} \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{R}^2/_{(x,y)\sim(x+1,y)}$ *se* $\varepsilon(\nu_C) = 1$ *ed* $\varepsilon(f_C^*\pi) = 1$;

(II) $\mathbb{R}^3/_{(x,y,z)\sim(x+1,-y,z)} \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{R}^2/_{(x,y)\sim(x+1,-y)}$ *se* $\varepsilon(\nu_C) = -1$ *ed* $\varepsilon(f_C^*\pi) = 1$;

(III) $\mathbb{R}^3/_{(x,y,z)\sim(x+1,y,-z)} \xrightarrow{\pi_3} \mathbb{R}^2/_{(x,y)\sim(x+1,y)}$ *se* $\varepsilon(\nu_C) = 1$ *ed* $\varepsilon(f_C^*\pi) = -1$;

(IV) $\mathbb{R}^3/_{(x,y,z)\sim(x+1,-y,-z)} \xrightarrow{\pi_4} \mathbb{R}^2/_{(x,y)\sim(x+1,-y)}$ *se* $\varepsilon(\nu_C) = -1$ *ed* $\varepsilon(f_C^*\pi) = -1$;

dove ogni π_i *denota l'applicazione indotta a quoziente dalla proiezione canonica:*

$$p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad p : (x, y, z) \longmapsto (x, y).$$

DIM: Segue in modo ovvio dal fatto che U si deforma su C e dal Teorema di sollevamento delle omotopie per i fibrati (cfr. [**S**], Lifting Homotopy Theorem). ∎

Lemma 3.1.6. *Ogni sezione del fibrato* (I) *[risp.* (II), (III), (IV)*] definisce una funzione* $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *che verifica la seguente condizione* (I) *[risp.* (II), (III), (IV)*]:*

(I) $h(x+1, y) = h(x, y)$ $\forall\, x, y$; (II) $h(x+1, -y) = h(x, y)$ $\forall\, x, y$;

(III) $h(x+1, y) = -h(x, y)$ $\forall\, x, y$; (IV) $h(x+1, -y) = -h(x, y)$ $\forall\, x, y$.

Viceversa ogni siffatta funzione definisce una ed una sola sezione del corrispondente fibrato.

DIM: Vediamo la dimostrazione nel primo caso. Siano $P_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/_{(x,y,z)\sim(x+1,y,z)}$ e $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/_{(x,y)\sim(x+1,y)}$ le proiezioni a quoziente.

Sia $\sigma : \mathbb{R}^2/_{(x,y)\sim(x+1,y)} \to \mathbb{R}^3/_{(x,y,z)\sim(x+1,y,z)}$ una sezione del fibrato (I), allora, dato che p_1 è un rivestimento, e dato che $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso, esiste una applicazione $\widetilde{\sigma} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\widetilde{\sigma} \circ P_1 = p_1 \circ \sigma$. Dal fatto che σ è una sezione, segue che si può scegliere $\widetilde{\sigma}$ del tipo:

$$\widetilde{\sigma}(x, y) = \big(x, y, h(x, y)\big).$$

Evidentemente, dovendo h far commutare il seguente diagramma (D3), deve avere la proprietà (I).

$$\text{(D3)} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\quad\widetilde{\sigma}\quad} & \mathbb{R}^3 \\ {\scriptstyle p_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle P_1} \\ \mathbb{R}^2/_{(x,y)\sim(x+1,y)} & \xrightarrow[\sigma]{} & \mathbb{R}^3/_{(x,y,z)\sim(x+1,y,z)} \end{array}$$

Viceversa, sia h come in (I), non è difficile vedere che l'applicazione

$$\sigma' : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\sigma' : (x,y) \longrightarrow \big(x,y,h(x,y)\big)$$

passa a quoziente definendo una sezione del fibrato (I). La stessa dimostrazione, *mutatis mutandis*, vale anche negli altri tre casi. ❑

Denotiamo con $\mathbb{R}^3/\!\sim_i \xrightarrow{\pi_i} \mathbb{R}^2/\!\sim_i$ i quattro fibrati sopra definiti. Abbiamo allora il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "P_i"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{R}^3/\!\sim_i \arrow[r, "\Phi", "\cong"'] \arrow[d, "\pi_i"'] & F^*\mathbf{E}|_U \arrow[r, "\pi^* F"] \arrow[d, "F^*\pi"'] & \mathbf{E} \arrow[d, "\pi"] \\
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "p_i"'] & \mathbb{R}^2/\!\sim_i \arrow[r, "\cong", "\varphi"'] & U \arrow[r, "F"'] & \mathbf{N}
\end{tikzcd}$$

dove Φ è l'isomorfismo dato da Lemma 3.1.5.

Chiamiamo $\bar{F}$ l'applicazione $\bar{F} = F \circ \varphi \circ p_i$, e sia K' il fibrato, sulla retta $\{y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$, dei nuclei di $d\bar{F}$, denotiamo con K'_x la fibra di K' sul punto $(x,0)$, ossia $K'_x = \ker d\bar{F}(x,0)$.

Lemma 3.1.7. *Sia h una funzione come nel lemma precedente, allora h definisce una sezione σ_1 tale che $\pi^*F \circ \sigma_1$ è una immersione se e solo se:*

$$(3) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, (u,v) \in K'_x - \big\{(0,0)\big\} \qquad \frac{\partial h}{\partial x}(x,0)u + \frac{\partial h}{\partial y}(x,0)v \neq 0.$$

Dim: L'applicazione $\pi^* \circ \sigma_1$ è una immersione se e solo se:

$$\forall\, q \in C \quad d\sigma_1(q)\big[K_q\big] \not\subseteq \ker\Big(d\big(\pi^*F\big)\big(\sigma_1(q)\big)\Big).$$

Evidentemente, se $\widetilde{\sigma} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\widetilde{\sigma}(x,y) = \big(x,y,h(x,y)\big)$ è come nella dimostrazione del lemma precedente, allora questa condizione si traduce nella seguente:

$$\forall\ x \in \mathbb{R} \quad d\widetilde{\sigma}(x,0)\big[K'_x\big] \not\subseteq \ker\Big(d\big(P_i \circ \Phi \circ \pi^*F\big)\big(x,0,h(x,y)\big)\Big).$$

Ma con le nostre notazioni:

$$d\widetilde{\sigma}(x,0)\big[K'_x\big] = \left\{ \Big(u, v, \frac{\partial h}{\partial x}(x,0)u + \frac{\partial h}{\partial y}(x,0)v\Big) \;\middle|\; (u,v) \in K'_x \right\};$$
$$\ker\Big(d\big(P_i \circ \Phi \circ \pi^*F\big)(x,0,z)\Big) = \big\{(u,v,w) \mid (u,v) \in K'_x,\ w = 0\big\};$$

da cui segue immediatamente la tesi. ❑

Lemma 3.1.8. *Il fibrato K è orientabile, ossia $\varepsilon(\kappa_C) = 1$ se e e solo se esiste una funzione mai nulla $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $k(x) = \big(k_1(x), k_2(x)\big)$ tale che:*

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad d\bar{F}(x,0)[k(x)] = 0;$$

$$(4) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad k_1(x+1) = k_1(x) \quad e \quad k_2(x+1) = \begin{cases} k_2(x) & se\ \varepsilon(\nu_C) = 1; \\ -k_2(x) & se\ \varepsilon(\nu_C) = -1. \end{cases}$$

Viceversa, K è non orientabile, ossia $\varepsilon(\kappa_C) = -1$, se e solo se esiste una funzione mai nulla $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $k(x) = \big(k_1(x), k_2(x)\big)$ tale che:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad d\bar{F}(x,0)[k(x)] = 0;$$

$$(5) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad k_1(x+1) = k_1(x) \quad e \quad k_2(x+1) = \begin{cases} -k_2(x) & se\ \varepsilon(\nu_C) = 1; \\ k_2(x) & se\ \varepsilon(\nu_C) = -1. \end{cases}$$

DIM: Un fibrato vettoriale in rette su C è orientabile se e solo se possiede una sezione mai nulla, ed una tale sezione per il fibrato K è data da una funzione $d(\varphi \circ p_i)[k]$ con k come in (4). Un analogo ragionamento dà anche la seconda parte dell'enunciato. ∎

Dai Lemmi 3.1.5, 3.1.7, e da Osservazione 3.1.4, segue banalmente che provare il Teorema 3.1.1 è equivalente a dimostrare il seguente:

Teorema 3.1.9. *Esite una funzione h che soddisfi le condizioni* (I) *[risp.* (II), (III), (IV)*] di Lemma 3.1.5 e* (3) *di Lemma 3.1.7 se e solo se vale la condizione* (1) *di Osservazione 3.1.2.*

DIM: **((1) è sufficiente).** Abbiamo quattro casi possibili, corrispondenti ai quattro fibrati (I), (II), (III), (IV).

Caso (I), (II): Dato che $\varepsilon(f_C^*\pi) = 1$, la condizione (1) implica che $\varepsilon(\kappa) = 1$, pertanto le ipotesi e la tesi sono esattamente le stesse di Lemma 2 in [**H**], non c'è nulla da dimostrare che non sia già dimostrato.

Caso (III): Dato che $\varepsilon(f_C^*) = -1$, la codizione (1) implica che $\varepsilon(\kappa) = -1$, e quindi per il Lemma 3.1.8 esiste una funzione mai nulla $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$(6) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad k_1(x+1) = -k_1(x) \quad \text{e} \quad k_2(x+1) = -k_2(x).$$

Definiamo:

$$h(x,y) = r(x) + yk_2(x)$$

essendo:

$$r(x) = \int_0^x k_1(t)dt - \frac{1}{2}\int_0^1 k_1(t)dt.$$

Si osservi che:

$$\begin{aligned} r(x+1) + r(x) &= \int_0^{x+1} k_1(t)dt + \int_0^x k_1(t)dt - \int_0^1 k_1(t)dt = \\ &= \int_0^x k_1(t)dt + \int_1^{x+1} k_1(t)dt = \\ &= \int_0^x k_1(t)dt = + \int_0^x k_1(t+1)dt = && \text{per (6)} \\ &= \int_0^x k_1(t)dt - \int_0^x k_1(t)dt = 0; \end{aligned}$$

e quindi, usando di nuovo (6), si ottiene:

$$h(x+1, y) = -h(x, y) \qquad \forall\, x, y.$$

Pertanto, la funzione h verifica la condizione (III). D'altra parte:

$$\nabla h(x, 0) = k(x)$$

e quindi vale ovviamente anche la condizione (3).

Caso (IV): Anche in questo caso, la condizione (1) implica che $\varepsilon(\kappa_C) = -1$, e quindi per il Lemma 3.1.8 esiste una funzione $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$\text{(7)} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad k_1(x+1) = -k_1(x) \quad \text{e} \quad k_2(x+1) = k_2(x).$$

Come prima si definisca:

$$h(x, y) = r(x) + yk_2(x)$$

essendo:

$$r(x) = \int_0^x k_1(t)dt - \frac{1}{2}\int_0^1 k_1(t)dt;$$

e si usi (7) per ottenere:

$$h(x+1, -y) = -h(x, y); \qquad \nabla h(x, 0) = k(x);$$

che è la tesi.

((1) è necessaria). Supponiamo che esista una tale funzione h, allora la proiezione ortogonale di $\nabla h(x, 0)$ su K'_x fornisce una funzione mai nulla con la proprietà (4), nel caso (I) e nel caso (II), o con la proprietà (5), nel caso (III) e nel caso (IV). Questo conclude la dimostrazione del Teorema 3.1.9. ∎

Prima di affrontare il problema della fattorizzazione per mezzo di *embedding*, diamo una applicazione del risultato appena dimostrato (Teorema 3.1.1) al problema della fattorizzazione di un'applicazione generica in $\mathbb{RP}^2$ per mezzo di una immersione in $\mathbb{RP}^3$ seguita da una proiezione centrale (proiezione da un punto).

3.2. Applicazioni generiche in $\mathbb{RP}^2$

Denotiamo con $\mathbb{RP}^3$ lo spazio proiettivo reale, e sia $p \in \mathbb{RP}^3$ un punto fissato. Si identifichi il piano proiettivo reale $\mathbb{RP}^2$ con l'insieme delle rette in $\mathbb{RP}^3$ passanti per il punto p. Mediante tale identificazione, resta definita in modo ovvio una proiezione:

$$\pi : \mathbb{RP}^3 - \{p\} \longrightarrow \mathbb{RP}^2.$$

Sia $F : S \to \mathbb{RP}^2$ una applicazione generica, ci si può chiedere se esiste una immersione $\widetilde{F} : \mathbf{S} \to \mathbb{RP}^3 - \{p\}$ tale che $F = \pi \circ \widetilde{F}$.

Dimostreremo la seguente:

Proposizione 3.2.1. *Con le notazioni appena introdotte, una tale applicazione $\widetilde{F}$ esiste se e soltanto se, per ogni componente C del luogo critico Σ di F, si ha:*

$$(-1)^{c(C)}\varepsilon(\nu_C) = 1.$$

Osservazione 3.2.2. Osserviamo che la condizione è esattamente la stessa data da Haefliger [**H**], per la fattorizzabilità di una applicazione generica a valori in $\mathbb{R}^2$ mediante una immersione in $\mathbb{R}^3$ seguita da una proiezione lineare.

Dim: Osserviamo innanzitutto che la proiezione $\pi : \mathbb{RP}^3 - \{p\} \to \mathbb{RP}^2$ non è altro che il fibrato tautologico su $\mathbb{RP}^2$, pertanto possiamo usare il Teorema 3.1.1 e quindi la tesi sarà provata, se dimostriamo che:

$$\forall\ C, \qquad f_C^*\pi : f_C^*\mathbf{E} \longrightarrow C \quad \text{è il fibrato banale.}$$

Ricordiamo che f_C è una curva con un lato (coerente), (cfr. Proposizione 2.1.6), per concludere basta allora usare il seguente lemma (cfr. [**Pi3**]):

Lemma 3.2.3. *Una curva con cuspidi e nodi $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbb{RP}^2$ ha un lato se e solo se f è omotopicamente banale.*

DIM: È immediato verificare che la curva f ha un lato se e solo se la curva regolare $f_{\mathcal{C}}$ ne ha uno, dove $f_{\mathcal{C}}$ è ottenuta deformando f, in un intorno di ciascuna cuspide, nel modo suggerito in Fig. 35 di pag. 90. In più le curve f ed $f_{\mathcal{C}}$ sono evidentemente omotope. La tesi segue allora dall'ulteriore lemma:

Lemma 3.2.4. *Una curva chiusa, regolare in $\mathbb{RP}^2$ ha un lato se e solo se è omotopicamente banale.*

DIM: Sia $f : [0,1] \to \mathbb{RP}^2$ una curva chiusa, regolare, cioè:

$$f(1) = f(0), \qquad f'(1) = f'(0),$$

e sia $n(t)$ una campo di vettori lungo f trasversale ad f.

Sia $\tilde{f}$ un sollevamento di f ad $\mathbf{S}^2$, allora è un fatto ben noto che la curva f è omotopicamente banale se e soltanto se $\tilde{f}$ è una curva chiusa. Supponiamo per assurdo che $\tilde{f}(0) \neq \tilde{f}(1)$ e denotiamo con $\tilde{n}(t)$ il sollevamento del campo di vettori n. Dato che l'applicazione quoziente dalla sfera al piano proiettivo identifica punti opposti e vettori opposti tangenti a punti opposti, si ha:

$$(\star) \qquad \tilde{f}(1) = -\tilde{f}(0); \quad \tilde{f}'(1) = -\tilde{f}'(0); \quad \tilde{n}(1) = -\tilde{n}(0).$$

Per ipotesi, i tre vettori $\tilde{f}(t)$, $\tilde{f}'(t)$ ed $\tilde{n}(t)$ sono linearmente indipendenti, per ogni $t \in [0,1]$ e quindi:

$$det\big(\tilde{f}(t) \mid \tilde{f}'(t) \mid \tilde{n}(t)\big) \neq 0 \qquad \forall\, t \in [0,1];$$

d'altra parte, usando $(\star)$ si ha:

$$\begin{aligned} det\big(\tilde{f}(1) \mid \tilde{f}'(1) \mid \tilde{n}(1)\big) &= det\big(-\tilde{f}(0) \mid -\tilde{f}'(0) \mid -\tilde{n}(0)\big) = \\ &= -det\big(\tilde{f}(0) \mid \tilde{f}'(0) \mid \tilde{n}(0)\big), \end{aligned}$$

che è una palese contraddizione. Viceversa, se f è omotopicamente banale, sia $\widetilde{f}$ il suo sollevamento ad $\mathbf{S}^2$, dato che $\mathbf{S}^2$ è orientabile, $\widetilde{F}$ ha un lato. Sia quindi $\widetilde{n}$ un campo di vettori trasversale ad $\widetilde{f}$, evidentemente allora, detta $\pi : \mathbf{S}^2 \to \mathbb{RP}^2$ la proiezione a quoziente, $d\pi(t)[n(t)]$ risulta essere un campo trasversale ad f.

Ciò conclude la dimostrazione dei due lemmi e quindi di Proposizione 3.2.1. ∎

3.3. Fattorizzazioni con embeddings: il caso del fibrato banale

Siano S ed $\mathbf{N}$ due superficie compatte, connesse e sia $\pi : \mathbf{E} \to \mathbf{N}$ un fibrato vettoriale, differenziabile di rango 1, su $\mathbf{N}$.

Definizione 3.3.1. *Diremo che F è fattorizzabile in $\mathbf{E}$ se e solo se esiste un embedding (immersione iniettiva) $\widetilde{F} : S \to \mathbf{E}$ tale che $F = \widetilde{F} \circ \pi$.*

Osservazione 3.3.2. Sia $F^*\pi : F^*\mathbf{E} \to S$ il fibrato su S indotto da $\mathbf{E}$ via F. Analogamente a quanto visto in §3.1 possiamo asserire che F è fattorizzabile in $\mathbf{E}$ se e soltanto se esiste una sezione $\sigma : S \to F^*\mathbf{E}$ del fibrato indotto tale che $\pi^*F \circ \sigma$ sia un embedding (si veda il diagramma (D2) di §3.1).

Nel caso che il fibrato su $\mathbf{N}$ sia banale, ossia $\mathbf{E} = \mathbf{N} \times \mathbb{R}$, la condizione di fattorizzabilità si esprime in maniera ancora più semplice e più precisamente F è fattorizzabile se e soltanto se esiste una funzione $h : S \to \mathbb{R}$ tale che l'applicazione $(F, h) : S \to \mathbf{N} \times \mathbb{R}$ è un embedding. In questo caso chiameremo la funzione h un'altezza per F.

Osserviamo allora che la condizione che F sia fattorizzabile si conserva per equivalenza a destra, ossia vale la seguente:

Proposizione 3.3.3. *Se $F : S \to \mathbf{N}$ ed $F' : S' \to \mathbf{N}$ sono equivalenti a destra (r–equivalenti), allora F è fattorizzabile se e soltanto se anche F' lo è.*

Dim: Sia $\varphi : S' \to S$ tale che $F' = F \circ \varphi$. È un fatto ben noto dalla teoria dei fibrati (cfr. [**S**]) che allora esiste un diffeomorfismo $\Phi : (F')^*\mathbf{E} \to F^*\mathbf{E}$ tale che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
N & \xleftarrow{F'} & S' & \xleftarrow{(F')^*\pi} & (F')^*\mathbf{E} & \xrightarrow{\pi^*F'} & \mathbf{E} \\
\Vert & & \Big\downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\Phi} & & \Vert \\
N & \xleftarrow[F]{} & S & \xleftarrow[F^*\pi]{} & F^*\mathbf{E} & \xrightarrow[\pi^*F]{} & \mathbf{E}
\end{array}$$

È allora chiaro che se $\sigma' : S' \to (F')^*\mathbf{E}$ è una sezione tale che $\pi^* F' \circ \sigma'$ è un embedding, allora $\sigma = \Phi \circ \sigma' \circ \varphi^{-1}$ è una sezione del fibrato $F^*\mathbf{E}$ tale che $\pi^* F \circ \sigma$ è un embedding. Chiaramente si possono scambiare i ruoli di F ed F', ottenendo così la tesi. ∎

Nel capitolo 2, abbiamo visto che un'applicazione generica $F : S \to \mathbf{N}$ è completamente determinata a meno di equivalenza destra da un β–assemblaggio per una parola di $F|_{\partial S}$, quindi ci si aspetta che, in qualche senso da precisare, "l'informazione" relativa alla fattorizzabilità di F sia implicitamente contenuta in questo dato. In questa sezione e nella successiva, cercheremo di esplicitare questa "informazione".

Cominciamo dimostrando alcuni lemmi di carattere generale.

Lemma 3.3.4. *Siano $F : S \to \mathbf{N}$ una applicazione generica, Σ il suo luogo critico e Γ il suo contorno apparente. Sia $D \subset \mathbf{N}$ un disco tale che:*

(1) *∂D è in posizione generica rispetto a Γ;*
(2) *D non contiene cuspidi di Γ;*
(3) *$D \cap \Gamma$ è unione di archi semplici (ossia all'interno di D non ci sono occhielli di Γ).*

Allora F ristretta ad ogni componente connessa di $F^{-1}(D) - \Sigma$ è iniettiva.

DIM: Sia $\infty \notin D$ un punto fissato in $\mathbf{N}$ e sia X un campo su $\mathbf{N}$ con un unico zero in ∞.

Sia C una componente di $F^{-1}(D) - \Sigma$ e sia C_ε ottenuta da C rimuovendo un piccolo intorno di Σ. Evidentemente ∂C_ε è costituito da rami di $F^{-1}(\partial D)$ e da archi paralleli a Σ. Inoltre $F|_{C_\varepsilon}$ è una immersione e, detto k il numero di componenti di ∂C_ε, $F(\partial C_\varepsilon)$ è costituita da k *loop* ottenuti da archi di ∂D e da archi paralleli a rami di Γ (vedi Fig. 40).

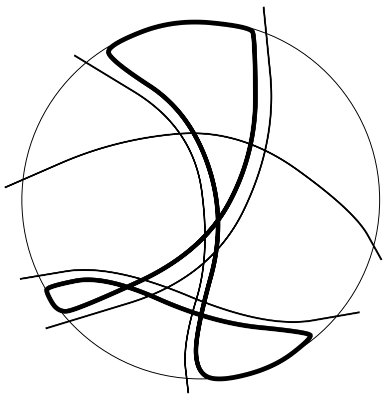


Fig. 40

Osserviamo allora che, munendo questi loop del lato indotto dalla immersione, dalle assunzioni fatte su D e dal fatto che $\infty \notin D$, il numero di rotazione di ciascuno di questi loop è maggiore o uguale ad 1 (si usino le Proposizioni 1.7.18 ed 1.7.23);

ovvero:

$$R_X(F|_{\partial C_\varepsilon}) \geq k.$$

Ma poichè $\infty \notin F(C_\varepsilon)$, per Proposizione 1.7.20 si ha:

$$R_X(F|_{\partial C_\varepsilon}) = \chi(C_\varepsilon) \leq 1;$$

quindi ∂C_ε ha una sola componente di bordo ed $R_X(F|_{\partial C_\varepsilon}) = 1$. In altri termini, deve necessariamente aversi che $C_\varepsilon \cong D^2$, $F|_{\partial C_\varepsilon}$ è una curva semplice, e quindi $F|_{C_\varepsilon}$ è un embedding. Per l'arbitrarietà della scelta dell'intorno di Σ si ha la tesi. ❏

Sia ora R un sistema di segmenti per $F|_\Sigma$ (cfr. Definizione 2.4.1), per quanto già osservato in §2.6, $F^{-1}(R)$ è costituito da un insieme di archi lisci che hanno almeno un estremo su $\Sigma \cup F^{-1}(\infty)$. Indichiamo con $H(F)$ l'insieme ottenuto da $\Sigma \cup F^{-1}(R)$ rimuovendo tutti i lati con un solo estremo su $\Sigma \cup F^{-1}(\infty)$.

Osservazione 3.3.5. $F^{-1}(\Omega)$ è interamente contenuto in $H(F)$, in quanto ogni segmento $\omega \in \Omega$ è una curva chiusa e, pertanto, ogni arco che costituisce $F^{-1}(\omega)$ deve necessariamente avere entrambi gli estremi su $\Sigma \cup F^{-1}(\infty)$.

Lemma 3.3.6. *Con le notazioni appena introdotte, F ristretta ad ogni componente connessa di $S - H(F)$ è iniettiva.*

DIM: Siano $p, q \in S - H(F)$, e sia $\gamma : [0, 1] \to S - H(F)$ una curva tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Dimostriamo che allora $F(p) \neq F(q)$.

Con le stesse tecniche usate nella dimostrazione di Lemma 1.11.3, ci si riconduce al caso in cui $p, q \in S - F^{-1}(R)$, γ prenda valori in $S - F^{-1}(R)$ ed $F \circ \gamma$ sia una curva semplice in posizione generica rispetto a Γ.

Sia allora D un disco in $\mathbf{N}$ che borda $F \circ \gamma$. Dato che $\partial D \cap R = \emptyset$, necessariamente $D \cap R = \emptyset$, ma poichè R è un sistema di segmenti per Γ, D non può contenere nè cuspidi di Γ nè componenti connesse di $\mathbf{N} - \Gamma$, in particolare non può contenere occhielli di Γ. Da Lemma 3.3.4 segue che allora $F(p) \neq F(q)$. ❏

Abbiamo bisogno di due lemmi di carattere puramente topologico:

Lemma 3.3.7. *Sia X uno spazio topologico connesso per archi e siano $U, V \subseteq X$ due aperti, connessi per archi e tali che $X = U \cup V$ ed $U \cap V$ non sia connesso per archi. Allora $H_1(X) \neq 0$, dove H_1 denota il primo gruppo di omologia singolare.*

DIM: Consideriamo il seguente tratto della successione esatta di Mayer–Vietoris:

$$H_1(X) \longrightarrow H_0(U \cap V) \longrightarrow H_0(U) \oplus H_0(V) \longrightarrow H_0(X) \longrightarrow 0.$$

Dato che X, U e V sono per ipotesi connessi per archi, $H_0(X)$ è un gruppo libero di rango 1 ed $H_0(U) \oplus H_0(V)$ è un gruppo libero di rango 2. D'altra parte dato che $U \cap V$ ha almeno due componenti connesse per archi, $H_0(U \cap V)$ è un gruppo libero di rango $r \geq 2$. Ma allora se fosse $H_1(X) = 0$. Per una ben nota relazione sui ranghi, si avrebbe $2 - 1 = r$, che è palesemente assurdo. ❑

Lemma 3.3.8. *Siano $U_1, \ldots, U_n$, con $n \geq 3$, aperti connessi di uno spazio topologico X, tali che:*

$$\forall i \neq j \qquad U_i \cap U_j \neq \varnothing \iff |i - j| \equiv 1 \quad (\ mod\ n);$$

allora vale una delle seguenti due:

(1) $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \neq \varnothing$, *ed in tal caso $n = 3$;*
(2) $\forall i \qquad U_i \cap \big(\bigcup_{i \neq j} U_j\big)$ *è sconnesso.*

DIM: È evidente che se $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \neq \varnothing$ necessariamente $n = 3$. Supponiamo che la prima non sia vera allora:

$$U_i \cap \big(\bigcup_{i \neq j} U_j\big) = (U_i \cap U_{i+1}) \cup (U_i \cap U_{i-1}),$$

dove gli indici sono considerati modulo n.

I due aperti sul lato destro della precedente relazione sono non vuoti per ipotesi, d'altra parte sono anche disgiunti in quanto, se $n > 3$ allora $U_{i-1} \cap U_{i+1} = \varnothing$, se $n = 3$ allora $(U_i \cap U_{i+1}) \cap (U_i \cap U_{i-1}) = \bigcap_i U_i = \varnothing$, in quanto si è supposto che non valga la (1). ❑

Da Lemma 3.3.7 e Lemma 3.3.8 segue immediatamente:

Proposizione 3.3.9. *Siano $U_1, \ldots, U_n$ ($n \geq 3$) aperti connessi per archi di uno spazio topologico X che soddisfano l'ipotesi del Lemma 3.3.8; allora vale una delle seguenti due:*

(1) $n = 3$ *ed* $\bigcap_i U_i \neq \varnothing$;
(2) $H_1(\bigcup_i U_i) \neq 0$.

Nel seguito denoteremo con $\mathcal{C}$ l'insieme delle componenti connesse di $S - H(F)$.

Proposizione 3.3.10. *Ogni $C \in \mathcal{C}$ è diffeomorfa ad un disco aperto.*

DIM: Sia $C \in \mathcal{C}$ allora, per quanto osservato in Osservazione 3.3.5, $F(C) \subset \mathbf{N} - \Omega$, e per quanto visto in Lemma 3.3.6, $F|_C$ è 1–1. Dato che Ω è un insieme di generatori del gruppo fondamentale di $\mathbf{N}$, si ha che $\mathbf{N} - \Omega$ è diffeomorfa ad un disco aperto. Da ciò ne consegue allora che $F(C)$ è una superficie planare, ossia è un disco aperto con dei buchi (eventualmente nessun buco).

Supponiamo per assurdo che $F(C)$ non sia un disco aperto. Necessariamente C e quindi $F(C)$ ha almeno due componenti di bordo. Per come è costruita C, il bordo di $F(C)$ è costituito da rami di Γ e da tratti di segmenti di R; sia γ una componente interna del bordo di $F(C)$. Si hanno due casi: γ contiene tratti di segmenti, oppure γ è interamente costituito di rami di Γ.

Nel primo caso se γ contiene un tratto del segmento r, necessariamente r sconnette $F(C)$ ed analogamente, nel secondo caso, γ determina almeno una componente connessa di $\mathbf{N} - \Gamma$ da cui quindi parte un segmento r che necessariamente sconnette $F(C)$.

Ma ciò è in contraddizione con il fatto che, essendo C una componente connessa di $S - H(F)$, $F(C)$ non è sconnesso da nessun segmento di R. ∎

Osservazione 3.3.11. La proposizione appena dimostrata, permette di concludere che $H(F)$ è l'1–scheletro di una cellularizzazione di S.

Proposizione 3.3.12. *Siano C_1, $C_2 \in \mathcal{C}$, allora $F(C_1) \cap F(C_2)$ è connesso.*

DIM: Se $F(C_1) \cap F(C_2)$ fosse sconnesso, allora per Lemma 3.3.7, $F(C_1) \cup F(C_2)$ avrebbe almeno due componenti di bordo, ma allora la stessa argomentazione usata nella dimostrazione di Proposizione 3.3.10 garantirebbe l'esistenza di un segmento che sconnetterebbe $F(C_1) \cup F(C_2)$ e quindi sconnetterebbe almeno uno tra $F(C_1)$ ed $F(C_2)$. Ma ciò è assurdo. ❑

Supponiamo ora che $F^{-1}(\infty) = \{p_1, \dots, p_\beta\}$ e siano $D_1, \dots, D_\beta$ dischi in S tali che per ogni i, $p_i \in D_i$ ed $F|_{\partial D_i} = g_i$, dove le curve $g_1, \dots, g_\beta$ sono quelle che danno la β–espansione (cfr. §1.9 ed §2.6). Denotiamo con $\overset{\circ}{D}_i$ la parte interna di D_i e sia $\widetilde{S}$ la superficie con bordo $\widetilde{S} = S - \bigcup_{i=1}^{\beta} \overset{\circ}{D}_i$.

Proposizione 3.3.13. *L'applicazione F è fattorizzabile se e soltanto se $F|_{\widetilde{S}}$ è fattorizzabile.*

DIM: Una implicazione è banale. Viceversa, supponiamo che esista un *embedding* $\widetilde{F}_1 : \widetilde{S} \to \mathbf{E}$ tale che $\pi \circ \widetilde{F}_1 = F|_{\widetilde{S}}$.

Sia $U_\infty \subset \mathbf{N}$ un intorno di ∞ diffeomorfo ad un disco aperto, che non interseca Γ e contenente i supporti delle curve g_i. Evidentemente, dato che U_∞ è contrattile, il fibrato $\mathbf{E}|_{U_\infty}$ è banale (cfr. [S]); sia $\Phi : \mathbf{E}|_{U_\infty} \to U_\infty \times \mathbb{R}$ una sua banalizzazione.

Siano $U_1, \dots, U_\beta$ le componenti di $F^{-1}(U_\infty)$ tali che per ogni i, $p_i \in U_i$. Per costruzione gli U_i sono disgiunti, F applica ogni U_i biunivocamente su U_∞ e per ogni i, $D_i \subset U_i$.

Consideriamo l'applicazione $\widetilde{F}_2 = \Phi \circ \widetilde{F}_1 \Big|_{\bigcup_i (U_i - D_i)}$. Chiaramente, tale funzione sarà del tipo:

$$\widetilde{F}_2(p) = \big(F(p), h(p)\big).$$

Non è difficile vedere che dal fatto che $\widetilde{F}_1$, e quindi $\widetilde{F}_2$, è iniettiva segue che si può supporre di aver preso Φ in modo che la funzione h sia costante su ogni componente connessa del suo dominio, ossia possiamo supporre che esistano costanti $c_i \in \mathbb{R}$ tali che:

$$h(p) = c_i \qquad \forall\ p \in (U_i - D_i).$$

Evidentemente si può allora estendere $\widetilde{F}_1$ ponendo:

$$\widetilde{F}(p) = \begin{cases} \widetilde{F}_1(p) & \text{se } p \in \widetilde{S} \\ \Phi^{-1}\big(F(p), c_i\big) & \text{se } p \in D_i. \end{cases}$$

Chiaramente $\widetilde{F}$ è di classe C^∞ ed è un embedding. ❑

Supponiamo ora che il fibrato $\pi : \mathbf{E} \to \mathbf{N}$ sia banale, ossia $\mathbf{E} = \mathbf{N} \times \mathbb{R}$ e π la proiezione sulla prima coordinata. Supponiamo che $F : S \to \mathbf{N}$ sia fattorizzabile in $\mathbf{E}$ e sia $h : S \to \mathbb{R}$ una altezza per F (cfr. Osservazione 3.3.2).

Proposizione 3.3.14. *Sia h un'altezza per F. Allora per ogni C_1, $C_2 \in \boldsymbol{\mathcal{C}}$ tali che $F(C_1) \cap F(C_2) \neq \varnothing$, vale una (e solo una) delle seguenti due:*

(1) $\forall x \in C_1,\ y \in C_2 \quad t.\ c. \quad F(x) = F(y) \quad risulta \quad h(x) < h(y)$;

(2) $\forall x \in C_1,\ y \in C_2 \quad t.\ c. \quad F(x) = F(y) \quad risulta \quad h(x) > h(y)$.

Dim: Chiaramente le due affermazioni si escludono a vicenda. Supponiamo per assurdo che entrambe siano false, ovvero che esistano due coppie di punti $x_1, x_2 \in C_1$, $y_1, y_2 \in C_2$ tali che $F(x_1) = F(y_1) = z_1$, $F(x_2) = F(y_2) = z_2$ ma $h(x_1) < h(y_1)$ ed $h(x_2) > h(y_2)$. Sia γ un cammino da z_1 a z_2 contenuto in $F(C_1) \cap F(C_2)$, che per Proposizione 3.3.12 è connesso, e siano $\gamma_1 = (F|_{C_1})^{-1} \circ \gamma$ e $\gamma_2 = (F|_{C_2})^{-1} \circ \gamma$. Dette $h_1 = h \circ \gamma_1$ ed $h_2 = h \circ \gamma_2$, allora:

$$h_1(0) = h(x_1) < h(y_1) = h_2(0), \quad \text{ed} \quad h_1(1) = h(x_2) > h(y_2) = h_2(1),$$

quindi esiste $t_0 \in (0,1)$ tale che $h_1(t_0) = h_2(t_0)$. Ma allora si sono trovati due punti distinti di S, $\gamma_1(t_0)$ e $\gamma_2(t_0)$, tali che:

$$h(\gamma_1(t_0)) = h(\gamma_2(t_0)), \quad \text{ed} \quad F(\gamma_1(t_0)) = F(\gamma_2(t_0)) = \gamma(t_0).$$

Ciò contraddice l'iniettività di $\widetilde{F} = (F, h)$. ∎

Definizione 3.3.15. *Chiamiamo grafo indotto da $\widetilde{F} = (F, h)$ il grafo orientato $L(\widetilde{F})$ che ha per vertici l'insieme $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ e per lati l'insieme:*

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \big\{(C_1, C_2) \in \boldsymbol{\mathcal{C}} \times \boldsymbol{\mathcal{C}} \;\big|\; C_1, C_2 \text{ soddisfano } (1) \text{ di Proposizione 3.3.14}\big\}.$$

Scriveremo $C_1 \to C_2$ per indicare $(C_1, C_2) \in \boldsymbol{\mathcal{E}}$.

Proposizione 3.3.16. *Il grafo $L(\widetilde{F})$ non ha loop.*

Dim: Supponiamo per assurdo di avere un loop $C_1 \to C_2 \to \cdots \to C_n \to C_1$, che supponiamo di lunghezza minima. Prima di tutto proviamo che:

$$(\star) \qquad \forall i \neq j \qquad F(C_i) \cap F(C_j) \neq \varnothing \iff |i - j| \equiv 1 \mod n.$$

Infatti se C_i, C_j sono tali che $j - i > 1$ e $F(C_i) \cap F(C_j) \neq \emptyset$, allora, per Proposizione 3.3.14, o $C_i \to C_j$ o $C_j \to C_i$. Ma allora, il loop:

$$C_1 \to \cdots \to C_i \to C_j \to \cdots \to C_n \to C_1, \qquad \text{(nel primo caso)}$$
$$C_i \to C_{i+1} \to \cdots \to C_j \to C_i, \qquad \text{(nel secondo caso)}$$

risulta essere strettamente piú corto di quello di partenza, e ciò è assurdo.

Da $(\star)$ e Proposizione 3.3.9 segue quindi che o $n = 3$ ed $\bigcap_i F(C_i) \neq \emptyset$ oppure $H_1(\bigcup_i F(C_i)) \neq 0$. Nel primo caso, presi $x_i \in C_i$ tali che $F(x_1) = F(x_2) = F(x_3)$, per definizione di $\to$, si ha:

$$C_1 \to C_2 \implies h(x_1) < h(x_2), \qquad C_2 \to C_3 \implies h(x_2) < h(x_3),$$
$$C_3 \to C_1 \implies h(x_3) < h(x_1),$$

che è palesemente assurdo; nel secondo caso $\bigcup_i F(C_i)$ risulta essere diffeomorfo ad un disco aperto con dei buchi; ragionando come nella dimostrazione di Proposizione 3.3.10, si ottiene anche in questo caso un assurdo. ∎

Come quando si è definita la parola di una curva, per ogni segmento $r \in R$, fissiamo una orientazione di un intorno tubolare di $r - \infty$, in modo da dare un senso all'espressione di "sinistra" e "destra" di un segmento.

Proposizione 3.3.17. *Sia F fattorizzabile e siano $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathcal{C}$, ℓ, ℓ_1, ℓ_2, lati del grafo $H(F)$, valgono le seguenti proprietà:*

(A) *se C_1, C_2 sono adiacenti lungo ℓ (ovvero $\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \supseteq \ell$) ed $F(C_3) \cap F(\ell) \neq \emptyset$ allora :*

$$C_1 \to C_3 \text{ e } C_2 \to C_3, \qquad \textit{oppure} \qquad C_3 \to C_1 \text{ e } C_3 \to C_2;$$

(B) *se C_1, C_2 sono adiacenti lungo ℓ_1 e C_3, C_4 lungo ℓ_2 con $F(\ell_1) \cap F(\ell_2) \neq \emptyset$, essendo $F(C_1)$, $F(C_3)$ sul lato sinistro del segmento r ed $F(C_2)$, $F(C_4)$ sul suo lato destro, dove $r \in R$ denota il segmento tale che $F(\ell_i) \subset r$, allora:*

$$C_1 \to C_3 \text{ e } C_2 \to C_4; \qquad \textit{oppure} \qquad C_3 \to C_1 \text{ e } C_4 \to C_2.$$

DIM: Se C_1, C_2, C_3, sono come in (A), allora sia $F(C_1) \cap F(C_3)$ che $F(C_2) \cap F(C_3)$ sono non vuoti, quindi, tra C_1 e C_3 e tra C_2 e C_3 c'è sicuramente una qualche freccia.

Supponiamo per assurdo che $C_1 \to C_3$ e $C_3 \to C_2$. Sia $z \in F(C_3) \cap F(\ell)$ e sia $p \in \ell$ tale che $F(p) = z$. Preso U un intorno connesso di p tale che $U \cap C_3 = \emptyset$ ed $F(U) \subset F(C_3)$ (esiste per continuità). Scegliamo punti $p_1 \in U \cap C_1$, $p_2 \in U \cap C_2$ ed un cammino γ in U, che li congiunga. Posto $\gamma_3 = (F|_{C_3})^{-1} \circ F \circ \gamma$, evidentemente risulta $F\big(\gamma_3(t)\big) = F\big(\gamma(t)\big)$ $\forall t \in [0,1]$. Ma:

$$C_1 \to C_3 \implies h\big(\gamma(0)\big) < h\big(\gamma_3(0)\big), \qquad C_3 \to C_2 \implies h\big(\gamma(1)\big) > h\big(\gamma_3(1)\big),$$

quindi $\exists\ t_0 \in (0,1)$ tale che $h\big(\gamma(t_0)\big) = h\big(\gamma_3(t_0)\big)$, che contraddice l'iniettività di (F,h). Un'argomentazione del tutto simile, prova anche la (B). ❏

Il significato geometrico delle condizioni (A) e (B), enunciate nella proposizione ora dimostrata, è illustrato in Fig. 41.

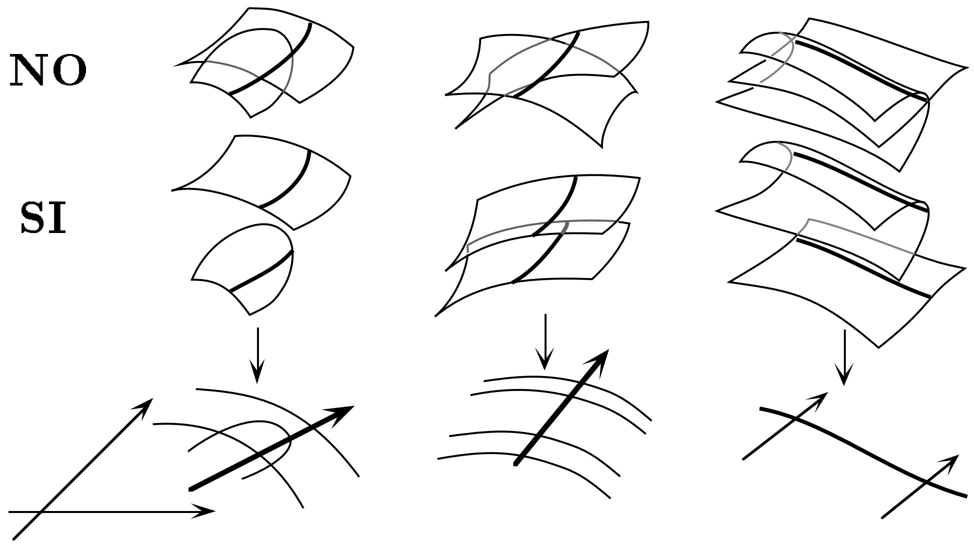


Fig. 41

Le Proposizioni 3.3.14, 3.3.16 e 3.3.17, dimostrano allora il seguente:

Teorema 3.3.18. *Sia $F : S \to \mathbf{N}$ un'applicazione generica fattorizzabile in $\mathbf{N} \times \mathbb{R}$; allora si può dotare l'insieme $\mathcal{C}$ di una struttura di grafo orientato senza loop che verifica le (A) e (B) di Proposizione 3.3.17.*

Teorema 3.3.19. *La condizione del teorema precedente è anche sufficiente.*

DIM: Articoleremo la dimostrazione in due passi:

(1) definizione di una altezza su $\widetilde{S}$ meno un intorno tubolare del luogo critico;
(2) estensione di tale funzione a tutta $\widetilde{S}$.

Per Proposizione 3.3.13 seguirà allora la tesi.

Sia L il grafo nell'ipotesi, non è difficile vedere che la condizione di essere senza loop è equivalente a dire che la relazione $\to$ è estendibile ad un ordinamento totale $\prec$ su $\mathcal{C}$ e, chiaramente, questo ordinamento continua a verificare le condizioni (A) e (B). Pertanto possiamo supporre $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ con $C_s \prec C_{s+1}$ per ogni s.

Primo passo. Sia U un intorno tubolare di Σ tale che $F|_{\partial U}$ sia generica (senza cuspidi e solo con incroci normali), denotiamo $S' = \widetilde{S} - U$, $\widetilde{\Gamma} = F(\partial S')$ e se $C \in \mathcal{C}$ indichiamo $C' = C \cap S'$. Fissiamo un intorno contrattile V_∞ di ∞ in $\mathbf{N}$, che sia contenuto nella parte interna (ossia indicata dal suo lato) di ciascuna delle curve g_i, ovvero in modo tale che $F(\widetilde{S}) \subset (\mathbf{N} - V_\infty)$. Per ogni $r \in R$ prendiamo un intorno orientato V_r di $r - V_\infty$ in $\mathbf{N} - V_\infty$ ed un diffeomorfismo $\varphi_r : V_r \to [0, t_r] \times [-1, 1]$, tali che:

(1) $V_r \cap V_{r'} = \emptyset \quad \forall r \neq r'$;
(2) $\forall r \in R \quad V_r$ non contiene punti doppi di $\widetilde{\Gamma}$;
(3) $\forall r \in R \quad \varphi_r(r) \subseteq [0, t_r] \times \{0\}$;
(4) $\forall r \in R \quad (r \cup \Gamma) \cap V_r$ é connesso (questa condizione, insieme alla (2) vuol dire che V_r contiene soltanto rami di $\widetilde{\Gamma}$ che intersecano r);
(5) se $\Gamma_{r,j}$ denota la componente di $\widetilde{\Gamma} \cap V_r$ che interseca r nel j–esimo punto contando secondo l'orientazione di r, allora $\forall \vartheta \in f^{-1}(\Gamma_{r,j}) \qquad \varphi_r(f(\vartheta)) = (j, e\vartheta + c)$ con c una costante opportuna;
(6) $\forall r \in R \quad \varphi_r$ e $\varphi_{r|r} : r \to \mathbb{R}$ conservano l'orientazione.

Tecniche standard di topologia differenziale mostrano che siffatti intorni e diffeomorfismi esistono.

Detto $V = \bigcup_{r \in R} V_r$, per ogni lato proprio ℓ di $H(F)$ denotiamo con U_ℓ la componente connessa di $F^{-1}(V) \cap S'$ che contiene $\ell \cap S'$. Denotiamo ancora con $r(\ell)$ il segmento tale che $F(\ell) \subset r(\ell)$ ed infine con $s(\ell)$ e $t(\ell)$ i due indici tali che $C_{s(\ell)}$, $C_{t(\ell)} \in \mathcal{C}$ siano le due componenti (eventualmente uguali) che sono adiacenti lungo ℓ, la prima sulla sinistra e la seconda sulla destra di ℓ (sinistra e destra intese rispetto alle orientazioni indotte tramite F).

Infine, sia $\psi : \mathbb{R} \times [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ tale che:

$$\begin{array}{ll} \psi(x,y) = 0 & \forall y \in \left[-1, -\frac{2}{3}\right]; \\ \psi(x,y) = 1 & \forall y \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]; \\ \psi(x,y) \in [0,1] & \forall x, y \in \mathbb{R} \times [-1,1]. \end{array}$$

Per ogni $C \in \mathcal{C}$ denotiamo con $C^* = (C \cap S') - \bigcup_\ell U_\ell$ e definiamo la funzione:

$$h_1 : S' \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$h_1 : x \longmapsto \begin{cases} s & \text{se } x \in C_s^* \\ s(\ell) + \big(t(\ell) - s(\ell)\big)\psi\Big(\varphi_{r(\ell)}\big(F(x)\big)\Big) & \text{se } x \in U_\ell. \end{cases}$$

Per come è stata costruita, tale funzione risulta essere di classe C^∞. Mostriamo che l'applicazione $(F|_{S'}, h_1) : S' \to \mathbf{N} \times \mathbb{R}$ è iniettiva. Siano $x \neq y \in S'$, abbiamo tre casi possibili:

(I) $x \in C_s^*$ ed $y \in C_{s'}^*$;
(II) $x \in C_s^*$ ed $y \in U_\ell$:
(III) $x \in U_\ell$ ed $y \in U_{\ell'}$.

Caso (I): Se $s = s'$, dato che (cfr. Lemma 3.3.6) $F|_{C_s}$ è iniettiva, allora $F(x) \neq F(y)$; se $s \neq s'$ allora, per come è definita h_1, $h_1(x) \neq h_1(y)$.
Caso (II): Se $F(x) \neq F(y)$ non c'è niente da dimostrare; se $F(x) = F(y)$ allora $F(C_s^*) \cap F(U_\ell) \neq \emptyset$, e quindi, per come sono stati presi gli intorni V_i, risulta $F(C_s) \cap r(\ell) \neq \emptyset$; ma la condizione (A) su $\prec$, implica che:

cioè:
$$\begin{array}{ccccccc} C_s \prec C_{s(\ell)} & \text{e} & C_s \prec C_{t(\ell)} & \text{o} & C_{s(\ell)} \prec C_s & \text{e} & C_{t(\ell)} \prec C_s; \\ s < s(\ell) & \text{e} & s < t(\ell) & \text{o} & s(\ell) < s & \text{e} & t(\ell) < s. \end{array}$$

Ma, per come è stata definita h_1, $h_1(x)$ è un valore compreso tra $s(\ell)$ e $t(\ell)$, mentre $h_1(y) = s$. Ne segue allora che $h_1(x) \neq h_1(y)$.
Caso (III): Supponiamo che $F(x) = F(y) = p$; visto che gli intorni V_r sono a due a due disgiunti, deve necessariamente aversi: $r(\ell) = r(\ell')$. Ma allora dal fatto che

$F(U_\ell) \cap F(U_{\ell'}) \neq \varnothing$, e dalle proprietà (2) e (4) degli intorni V_r, segue allora che necessariamente $F(\ell) \cap F(\ell') \neq \varnothing$. Ma allora per la condizione (A), si ha:

$$C_{s(\ell)} \prec C_{s(\ell')} \quad \text{e} \quad C_{t(\ell)} \prec C_{t(\ell')} \qquad \text{o} \qquad C_{s(\ell')} \prec C_{s(\ell)} \quad \text{e} \quad C_{t(\ell')} \prec C_{t(\ell)}$$

ovvero:

$$(\star) \qquad s(\ell) < s(\ell') \quad \text{e} \quad t(\ell) < t(\ell') \qquad \text{o} \qquad s(\ell') < s(\ell) \quad \text{e} \quad t(\ell') < t(\ell).$$

Ma allora, per come è definita h_1, si ha che:

$$h_1(x) = s(\ell) + \big(t(\ell) - s(\ell)\big)\psi\big(\varphi_{r(\ell)}(p)\big);$$
$$h_1(y) = s(\ell') + \big(t(\ell') - s(\ell')\big)\psi\big(\varphi_{r(\ell')}(p)\big).$$

Dalla $(\star)$, unita al fatto già menzionato che $r(\ell) = r(\ell')$, segue allora immediatamente che:

$$h_1(x) < h_2(y) \qquad \text{o} \qquad h_2(y) < h_1(x).$$

Questo conclude la dimostrazione del primo passo.

Secondo passo. Per non appesantire troppo le notazioni, supporremo che Σ sia costituito da un'unica componente connessa; come si vedrà chiaramente, la stessa dimostrazione può essere portata avanti nel caso generale senza sostanziali differenze se non una maggiore complicazione formale.

Sia U un intorno tubolare di Σ, poniamo:

$$M = \begin{cases} \mathbb{R} \times [-1,1] \big/ _{(x,y)=(x+1,y)} & \text{se } \widetilde{U} \text{ è orientabile,} \\ \mathbb{R} \times [-1,1] \big/ _{(x,y)=(x+1,-y)} & \text{se } \widetilde{U} \text{ non è orientabile.} \end{cases}$$

Sia $\varphi : M \to \widetilde{U}$ un diffeomorfismo. Si può supporre di aver preso U e $\widetilde{\varphi}$ in modo che $\varphi\big(\{y = 0\}\big) = \Sigma$ e che l'immagine inversa tramite φ degli archi costituenti $H(F)$ siano segmenti verticali, ossia del tipo $\{t\} \times [-1,1]$, $\{t\} \times [0,1]$, oppure $\{t\} \times [-1,0]$.

Denotiamo con $p : \mathbb{R} \times [-1,1] \to M$ la proiezione a quoziente e siano t_i, s_j, $z_l \in [0,1)$ i punti tali che l'insieme:

$$\bigcup\nolimits_i \big(\{t_i\} \times [0,1]\big) \cup \bigcup\nolimits_j \big(\{s_j\} \times [-1,0]\big) \cup \bigcup\nolimits_l \big(\{z_l\} \times [-1,1]\big)$$

costituisca l'immagine inversa, tramite $\varphi \circ p$, degli archi di $H(F)$.

Denotiamo con D_j sia la generica componente connessa di $M - \varphi^{-1}\bigl(H(F)\bigr)$ sia la corrispondente componente di $U - H(F)$ (quando ci sarà ambiguità diremo esplicitamente a quale delle due accezioni ci riferiamo); inoltre, per ogni j denotiamo con $C_{i(j)} \in \mathcal{C}$ la componente di $\widetilde{S} - H(F)$ contenente D_j.

Lemma 3.3.20. *Sia $\bar{t} \in [0,1)$ un punto di cuspide (ossia, con le notazioni appena introdotte, $\bar{t} = t_i$ oppure $\bar{t} = s_j$) e siano $D_{j_1(\bar{t})}, D_{j_2(\bar{t})}, D_{j_3(\bar{t})}$ le tre componenti che hanno il punto $(\bar{t},0)$ nella loro chiusura. Sia $D_{j_1}(\bar{t})$ la componente che non è adiacente al segmento verticale uscente da $(\bar{t},0)$ (ossia $\{t_i\} \times [0,1]$ oppure $\{s_j\} \times [-1,0]$, cfr.* Fig. 42*); allora:*

$$C_{i(j_2(\bar{t}))} \prec C_{i(j_1(\bar{t}))} \prec C_{i(j_3(\bar{t}))} \quad \textit{oppure} \quad C_{i(j_3(\bar{t}))} \prec C_{i(j_1(\bar{t}))} \prec C_{i(j_2(\bar{t}))}.$$

Dim: Dato che $F(D_{j_1(\bar{t})}) \cap F(D_{j_2(\bar{t})}) \cap F(D_{j_3(\bar{t})}) \neq \emptyset$, la tesi segue dalla condizione (A) verificata da $\prec$. ❑

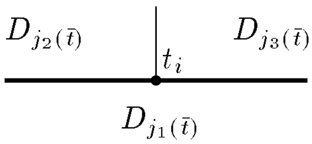


Fig. 42

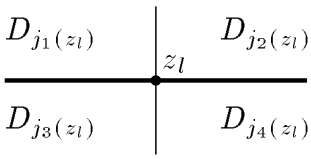


Fig. 43

Lemma 3.3.21. *Siano $D_{j_1(z_l)}, D_{j_2(z_l)}, D_{j_3(z_l)}, D_{j_4(z_l)}$ le quattro componenti che hanno il punto $(z_l,0)$ nella loro chiusura; supponiamo che $D_{j_1(z_l)} \subseteq \{y > 0, t < z_l\}$, $D_{j_2(z_l)} \subseteq \{y > 0, t > z_l\}$, $D_{j_3(z_l)} \subseteq \{y < 0, t < z_l\}$, $D_{j_4(z_l)} \subseteq \{y < 0, t > z_l\}$ (cfr.* Fig. 43*); allora:*

$$C_{i(j_1(z_l))} \prec C_{i(j_3(z_l))} \quad \text{e} \quad C_{i(j_2(z_l))} \prec C_{i(j_4(z_l))},$$

oppure

$$C_{i(j_1(z_l))} \succ C_{i(j_3(z_l))} \quad \text{e} \quad C_{i(j_2(z_l))} \succ C_{i(j_4(z_l))}.$$

Dim: In modo del tutto analogo alla dimostrazione della proposizione precedente, la tesi segue dalla condizione (B) verificata da $\prec$. ❑

Su $\mathbb{R} \times \{|y| = 1\}$ è definita la funzione $p \circ h_1$, traccia dell'altezza costruita al passo precedente, che denoteremo ancora con h_1. Non è difficile vedere che si può supporre di aver costruito l'altezza h_1 in modo che:

$$h_1(t,y) = \begin{cases} h_{1,1}(t) & \text{se } y \geq 1 \\ h_{1,-1}(t) & \text{se } y \leq -1 \end{cases}$$

Dai Lemmi 3.3.20 e 3.3.21 e dal modo in cui si è costruita l'altezza su $\widetilde{S}$, segue che possiamo supporre che $h_{1,1}$ ed $h_{1,-1}$ abbiano le seguenti proprietà:

(1) $h_{1,1}(t+1) = h_{1,1}(t)$ e $h_{1,-1}(t+1) = h_{1,-1}(t)$ se l'intorno U è orientabile oppure $h_{1,1}(t+1) = h_{1,-1}(t)$ e $h_{1,-1}(t+1) = h_{1,1}(t)$ nell'altro caso;

(2) $\exists\ \varepsilon > 0$ tale che:

- a) $h_{1,1}$ è strettamente monotona sugli intervalli $[t_i - \varepsilon, t_i + \varepsilon]$ e $[z_l - \varepsilon, z_l + \varepsilon]$;
- b) $h_{1,-1}$ è strettamente monotona sugli intervalli $[s_j - \varepsilon, s_j + \varepsilon]$ e $[z_l - \varepsilon, z_l + \varepsilon]$;
- c) $h_{1,1}$ e $h_{1,-1}$ sono costanti negli altri intervalli;

(3) $\forall\ t \in [0,1) \quad h_{1,1}(t) = h_{1,-1}(t) \iff t = t_i$ o $t = s_j$ per qualche i o j.

Dal Lemma 3.3.20 segue allora che si può estendere l'altezza h_1 in un intorno, del tipo $[\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta] \times [-1,1]$, di ogni cuspide, come suggerito in figura Fig. 44, in modo che $(F, h_1) : [\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta] \times [-1,1] \to \mathbf{N} \times \mathbb{R}$ sia un embedding. Inoltre, se per ogni punto di cuspide $\bar{t}$ denotiamo con $D_{j_1(\bar{t})}$, $D_{j_2(\bar{t})}$ e $D_{j_3(\bar{t})}$ le tre componenti aderenti al punto stesso (cfr. Lemma 3.3.20), detti $M(\bar{t}) = \max\{i(j_2(\bar{t})), i(j_3(\bar{t}))\}$ ed $m(\bar{t}) = \min\{i(j_2(\bar{t})), i(j_3(\bar{t}))\}$, possiamo supporre che l'estensione sia tale che:

$$(\star) \qquad \forall\ (t,y) \in [\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta] \times [-1,1] \qquad m(\bar{t}) \leq h_1(x,t) \leq M(\bar{t}).$$

Possiamo inoltre supporre di aver preso l'intorno U di Σ ed il numero δ sufficientemente piccoli, in modo che, per ogni coppia di punti di cuspide $(\bar{t}_1, 0)$, $(\bar{t}_2, 0)$ si abbia:

$$(\star\star) \qquad F\big([\bar{t}_1 - \delta, \bar{t}_1 + \delta] \times [-1,1]\big) \cap F\big([\bar{t}_2 - \delta, \bar{t}_2 + \delta] \times [-1,1]\big) = \varnothing\,.$$

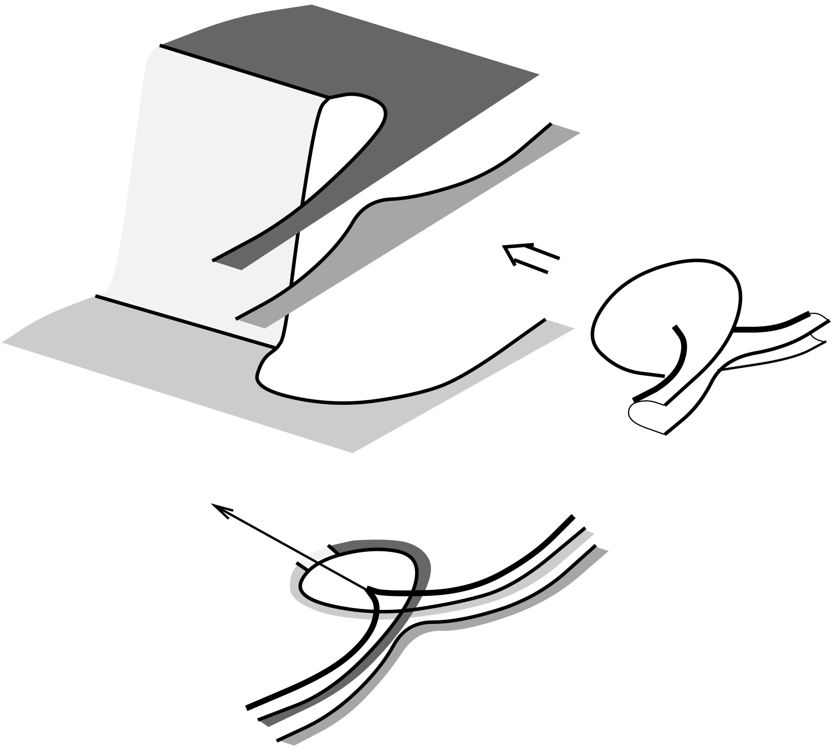


Fig. 44

Si ha il seguente:

Lemma 3.3.22. *L'applicazione:*

$$(F, h_1) : \widetilde{S} \cup \bigcup_{\bar{t}} \big([\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta] \times [-1, 1]\big) \longrightarrow \mathbf{N} \times \mathbb{R}$$

è un embedding.

DIM: Per come è stata estesa h_1, l'applicazione è evidentemente una immersione (ha differenziale iniettivo). D'altra parte, siano x_1, $x_2 \in \widetilde{S} \cup \bigcup_{\bar{t}} [\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta] \times [-1, 1]$, tali che $F(x_1) = F(x_2)$ e $h_1(x_1) = h_1(x_2)$. Per il fatto che $(F, h_1) : \widetilde{S} \to \mathbf{N} \times \mathbb{R}$ è iniettiva, per la $(\star\star)$ e per come è stata estesa h_1 all'intorno delle cuspidi, necessariamente deve risultare che se x_1 ed x_2 sono distinti, allora $x_1 \in [\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta] \times [-1, 1]$ e $x_2 \in \widetilde{S}$. Inoltre, è chiaro che il punto x_2 deve stare in una zona in cui h_1 è costante; detta C_i la componente di $\widetilde{S} - H(F)$ che lo contiene, $F(C_i)$ contiene la cuspide corrispondente al punto $(\bar{t}, 0)$. Ma allora:

$$F(C_i) \cap F(D_{j_l(\bar{t})}) \neq \varnothing \qquad l = 1, 2, 3,$$

ed applicando due volte la (A) si ottiene:

$$C_i \prec \min\{C_{i(j_l(\bar{t}))} \mid l = 1,2,3\} \quad \text{oppure} \quad C_i \succ \max\{C_{i(j_l(\bar{t}))} \mid l = 1,2,3\},$$

ovvero:

$$i < m(\bar{t}) = \min\{i(j_l(\bar{t})) \mid l = 1,2,3\} \quad \text{oppure} \quad i > M(\bar{t}) = \max\{i(j_l(\bar{t})) \mid l = 1,2,3\}.$$

Da ciò, usando la $(\star)$ ed il fatto che $h_1(x_2) = i$, segue evidentemente un assurdo. ∎

A questo punto resta da estendere h_1 ad $U - \bigcup_{\bar{t}}\big([\bar{t} - \delta, \bar{t} + \delta] \times [-1, 1]\big)$. Ora, nelle zone in cui le funzioni $h_{1,1}$ ed $h_{1,-1}$ sono entrambe costanti, si trova facilmente una estensione dell'altezza come suggerito in Fig. 45. D'altra parte il Lemma 3.3.21 (cfr. condizione (3)) garantisce che anche nelle zone del tipo $[z_l - \varepsilon, z_l + \varepsilon] \times [-1, 1]$, sul cui bordo le funzioni $h_{1,1}$ ed $h_{1,-1}$ sono entrambe monotone e tali che i valori assunti dall'una sono sempre minori dei valori assunti dall'altra, si può trovare una estensione locale (cfr. Fig. 46) di h_1. Inoltre, analogamente a quanto fatto nella estensione di h_1 attorno alle cuspidi, possiamo supporre che queste estensioni locali assumano nel punto (t, y) un valore compreso tra $h_{1,1}(t)$ e $h_{1,-1}(t)$.

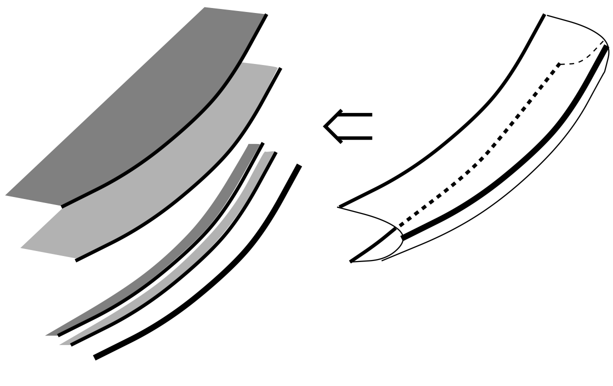


Fig. 45

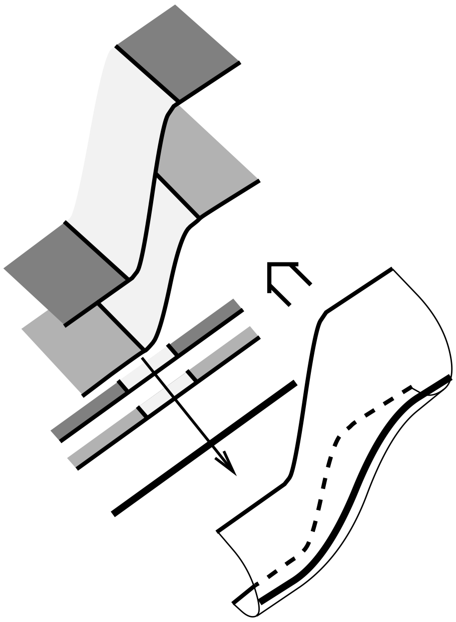


Fig. 46

Sempre la condizione (3), garantisce che queste estensioni locali si possono incollare a dare una estensione globale di h_1 ad una funzione $h : S \to \mathbb{R}$.

Con argomentazioni del tutto analoghe a quelle usate nella dimostrazione del Lemma 3.3.22, si dimostra facilmente, pur di aver preso l'intorno U sufficientemente piccolo, il seguente:

Lemma 3.3.23. *L'applicazione* $(F, h) : S \to \mathbf{N} \times \mathbb{R}$ *è iniettiva.*

Dato che evidentemente, per come è stata costruita h, l'applicazione (F, h) è una immersione, questo conclude la dimostrazione del Teorema 3.3.19. ❑

3.4. Una descrizione dei fibrati in rette sulle superficie

Lo scopo di questa sezione è quello di dare un modo costruttivo di descrivere i fibrati in rette su superficie compatte, in modo che sia possibile utilizzarla per la soluzione del problema della fattorizzazione nel caso generale.

Proposizione 3.4.1. *L'unico fibrato in rette sulla sfera* $\mathbf{S}^2$ *è il fibrato banale.*

Dim: Segue dal teorema di classificazione dei fibrati sulle sfere (cfr. [**S**], Teorema 18.5) e dal fatto che il gruppo fondamentale di $\mathbb{R} - \{0\}$ (che è il gruppo strutturale dei fibrati in rette) è banale. ❑

Visto allora che il caso dei fibrati banali è già stato esaminato nella sezione precedente, in questa sezione supporremo sempre che $\mathbf{N}$ sia una superficie compatta, connessa di genere positivo.

Ricordiamo una definizione di topologia:

Definizione 3.4.2. *Siano* X *ed* Y *spazi topologici e sia* $A \subset X$, *sia* $g : A \to Y$ *una applicazione continua, si definisce unione di* X *ed* Y *su* g *lo spazio topologico:*

$$X \underset{g}{\cup} Y = X \amalg Y \big/_{x = g(x)},$$

dove con $\amalg$ denotiamo come al solito l'unione disgiunta.

È un fatto standard di topologia differenziale (si veda ad esempio [**Hi**]), il seguente:

Teorema 3.4.3. *Siano M ed N due varietà differenziabili con bordo della stessa dimensione, e sia $\varphi; \partial N \to \partial M$ un diffeomorfismo. Allora esiste un'unica struttura di varietà differenziabile su $N \underset{\varphi}{\cup} M$ tale che le inclusioni di M ed N in $N \underset{\varphi}{\cup} M$ siano degli embedding.*

Torniamo alle nostre superficie. Sia $\mathbf{N}_1$ una superficie compatta con una componente di bordo, e sia $\pi_1 : \mathbf{E}_1 \to \mathbf{N}_1$ un fibrato in rette. Supponiamo che $\mathbf{E}_1|_{\partial \mathbf{N}_1}$ sia banale, e sia $\Phi : \mathbf{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbf{E}_1|_{\partial \mathbf{N}_1}$ una banalizzazione. Denotiamo con $\varphi : \mathbf{S}^1 \to \partial \mathbf{N}_1$ la restrizione di Φ alla sezione nulla. Possiamo allora considerare il fibrato su $\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 \underset{\varphi}{\cup} \mathbf{D}^2$ il cui spazio totale è dato da $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \underset{\Phi}{\cup} (\mathbf{D}^2 \times \mathbb{R})$ e con proiezione π definita in modo ovvio.

Dimostriamo ora che la costruzione precedente non dipende dalla banalizzazione scelta. Ovvero dimostriamo la seguente:

Proposizione 3.4.4. *Se $\Phi : \mathbf{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbf{E}_1|_{\partial S_1}$ e $\Phi : \mathbf{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbf{E}_1|_{\partial S_1}$ sono due banalizzazioni, allora i fibrati $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \underset{\Phi}{\cup} (\mathbf{D}^2 \times \mathbb{R})$ ed $\mathbf{E}' = \mathbf{E}_1 \underset{\Phi'}{\cup} (\mathbf{D}^2 \times \mathbb{R})$ sono isomorfi.*

Dim: Consideriamo l'applicazione $\Psi : \mathbf{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbf{S}^1 \times \mathbb{R}$, data da $\Psi = \Phi^{-1} \circ \Phi'$, evidentemente, esiste una estensione di Ψ ad un isomorfismo fibrato:

$$\widetilde{\Psi} : \mathbf{D}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{D}^2 \times \mathbb{R},$$

ma allora l'applicazione $(\mathrm{Id} \amalg \widetilde{\Psi}) : \mathbf{E}_1 \amalg (\mathbf{D}^2 \times \mathbb{R}) \to \mathbf{E}_1 \amalg (\mathbf{D}^2 \times \mathbb{R})$ passa a quoziente definendo una applicazione:

$$\mathbf{E}_1 \underset{\Phi'}{\cup} (\mathbf{D}^2 \times \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{E}_1 \underset{\Phi}{\cup} (\mathbf{D}^2 \times \mathbb{R})$$

che è evidentemente un isomorfismo di fibrati. ❑

Dato quindi un fibrato $\mathbf{E}_1$ su una superficie compatta connessa con una componente di bordo $\mathbf{N}_1$ che sia banale sul bordo di $\mathbf{N}_1$, la proposizione precedente definisce un fibrato $\mathbf{E}$ sulla superficie $\mathbf{N}$ ottenuta da $\mathbf{N}_1$ attaccando un disco al suo bordo.

Definizione 3.4.5. *Chiameremo tale fibrato la chiusura di* $\mathbf{E}_1$*, e lo denoteremo con* $\mathbf{E}_1 \cup (\mathbf{D}^2 \times \mathbb{R})$.

Proposizione 3.4.6. *Ogni fibrato su una superficie compatta senza bordo* $\mathbf{N}$ *è la chiusura di un qualche fibrato su una superficie con una componente di bordo.*

DIM: Sia $\mathbf{E}$ un fibrato su $\mathbf{N}$. Si consideri un disco D "embedded" in $\mathbf{N}$. Dato che D è diffeomorfo ad un disco, il fibrato $\mathbf{E}|_D$ è banale, e quindi anche $\mathbf{E}|_{\partial D}$ è banale.

Ma allora sia $\mathbf{N}_1$ la superficie ottenuta da $\mathbf{N}$ togliendogli la parte interna di D, e sia $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}|_{\mathbf{N}_1}$. Per quanto visto prima $\mathbf{E}_1|_{\partial \mathbf{N}_1} = \mathbf{E}|_{\partial D}$ è banale, ed è ovvio che $\mathbf{E}$ sia la chiusura di $\mathbf{E}_1$. ❏

Per quanto visto fino ad ora, dare un fibrato su una superficie compatta, connessa e senza bordo $\mathbf{N}$, è completamente equivalente a dare un fibrato sulla superficie $\mathbf{N}_1$, ottenuta da $\mathbf{N}$ rimuovendo la parte interna di un disco embedded, che ristretto a $\partial\mathbf{N}_1$ sia banale.

Come fatto in §1.8, definiamo genere pesato di una superficie compatta, connessa, senza bordo. $\mathbf{N}$, il numero:

$$h(\mathbf{N}) = \begin{cases} 2g(\mathbf{N}) & \text{se } \mathbf{N} \text{ è orientabile} \\ g(\mathbf{N}) & \text{se } \mathbf{N} \text{ non è orientabile} \end{cases}$$

essendo $g(\mathbf{N})$ il genere della superficie. Ricordiamo un altro fatto ben noto:

Teorema 3.4.7. *Ogni superficie compatta, connessa, di genere pesato* $h \geq 1$ *è il quoziente di un poligono con* $2h$ *lati identificati a coppie.*

DIM: Basta tagliare la superficie lungo un insieme di curve che rappresenti un insieme minimale di generatori del gruppo fondamentale della superficie. ❏

Sia quindi $\mathbf{N}$ una superficie compatta, connessa, senza bordo. Fissiamo una volta per tutte i seguenti dati:

(1) un punto $\infty \in \mathbf{N}$;
(2) un intorno aperto U_∞ di ∞, la cui chiusura sia diffeomorfa ad un disco;
(3) un insieme, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_h\}$, di curve lisce, rappresentanti un sistema di generatori minimale di $\pi_1(\mathbf{N}, \infty)$.

Sia $\mathbf{N}_1 = \mathbf{N} - U_\infty$, evidentemente, tagliando $\mathbf{N}_1$ lungo le curve $\omega_1 \cap \mathbf{N}_1$ si ottiene un poligono $P_{\mathbf{N}_1}$ con $4h$ lati. Chiamiamo $\ell_1^\infty, \dots, \ell_{2h}^\infty$ i lati che provengono dal bordo di U_∞, ed $\ell_1, \dots, \ell_{2h}$ gli altri. Chiaramente sul perimetro del poligono, i lati di tipo ℓ e quelli di tipo ℓ^∞ sono alternati. Possiamo supporre allora di averli numerati in modo che la loro disposizione sul perimetro del poligono sia: $\ell_1 \ell_1^\infty \dots \ell_{2h} \ell_{2h}^\infty$.

Per ogni $i = 1, \dots, 2h$, indichiamo con $\sigma(i)$ l'indice tale che ℓ_i ed $\ell_{\sigma(i)}$ sono identificati in $\mathbf{N}_1$, e con $\psi_i : \ell_i \to \ell_{\sigma(i)}$ il diffeomorfismo che dà tale identificazione. Osserviamo incidentalmente che per ogni i risulta: $\psi_{\sigma(i)} = \psi_i^{-1}$.

Consideriamo allora il fibrato banale $P_{\mathbf{N}_1} \times \mathbb{R}$, e supponiamo di avere associato ad ogni lato ℓ_i un peso $\rho_i = \pm 1$ in modo che $\rho_i = \rho_{\sigma(i)}$. Possiamo allora considerare il quoziente $\mathbf{E}_\rho = (P_{\mathbf{N}_1} \times \mathbb{R})/\!\sim$ dove:

$$(x_1, t_1) \sim (x_2, t_2) \iff x_1 \in \ell_i, \; x_2 = \psi_i(x_1), \; t_2 = \rho_i t_2.$$

Evidentemente $\mathbf{E}_\rho$ è un fibrato in rette su $\mathbf{N}_1$.

Proposizione 3.4.8. *Il fibrato* $\mathbf{E}_\rho|_{\partial \mathbf{N}_1}$ *è banale.*

DIM: Evidentemente, $\mathbf{E}_\rho|_{\partial \mathbf{N}_1}$ è il quoziente dell'unione disgiunta $\coprod_{i=1}^{n} (\ell_i^\infty \times \mathbb{R})$ per la relazione indotta da $\sim$. Ma, siccome ogni lato ℓ_i^∞ ha soltanto i suoi vertici in comune con i lati del tipo ℓ, e precisamente con i lati ℓ_i ed ℓ_{i+1}, il fibrato $\mathbf{E}_\rho|_{\partial \mathbf{N}_1}$ è ottenuto identificando $2h$ copie di $[0,1] \times \mathbb{R}$ per i bordi. D'altra parte ogni identificazione dei lati ℓ_i ed $\ell_{\sigma(i)}$ produce esattamente due di tali identificazioni, e quindi in totale avremo un numero pari di identificazioni che avvengono mediante l'applicazione $t \mapsto -t$. Da cui la tesi. ∎

Pertanto ogni distribuzione ρ di pesi su Ω produce un fibrato $\mathbf{E}_\rho$ su $\mathbf{N}_1$ di cui si può fare la chiusura, e quindi in definitiva produce un fibrato, che continuiamo a chiamare $\mathbf{E}_\rho$, sulla superficie $\mathbf{N}$.

Proposizione 3.4.9. *Ogni fibrato su* $\mathbf{N}$ *è ottenuto con la precedente costruzione.*

DIM: Sia $\mathbf{E}$ è un fibrato su $\mathbf{N}$, indichiamo con $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}|_{\mathbf{N}_1}$ e con $\pi_1 : \mathbf{E}_1 \to \mathbf{N}_1$ la sua proiezione.

Sia $\varphi : P_{\mathbf{N}_1} \to \mathbf{N}_1$ l'applicazione che dà il taglio di $\mathbf{N}_1$, e sia $\mathbf{E}_P = \varphi^*\mathbf{E}_1$ il fibrato indotto su $P_{\mathbf{N}_1}$. Dato che $P_{\mathbf{N}_1}$ è contrattile, il fibrato $\mathbf{E}_P$ è banale, sia $\Psi : P_{\mathbf{N}_1} \times \mathbb{R} \to \mathbf{E}_P$ una banalizzazione. Si ha il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
P_{\mathbf{N}_1} \times \mathbb{R} \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d] & \mathbf{E}_P \arrow[r, "\pi_1^*\varphi"] \arrow[d, "\varphi^*\pi_1"'] & \mathbf{E}_1 \arrow[d, "\pi_1"] \\
P_{\mathbf{N}_1} \arrow[r, equal] & P_{\mathbf{N}_1} \arrow[r, "\varphi"'] & \mathbf{N}_1
\end{tikzcd}$$

Allora il fibrato $\mathbf{E}_1$ è ottenuto da $P_{\mathbf{N}_1} \times \mathbb{R}$ quozientando per la relazione d'equivalenza:

$$(x_1, t_1) \sim (x_2, t_2) \iff \varphi(x_1) = \varphi(x_2) \quad \text{e} \quad (\pi_1^*\varphi)_{x_1}\Psi_{x_1}(t_1) = (\pi_1^*\varphi)_{x_2}\Psi_{x_2}(t_2).$$

Per come è definita l'applicazione φ, tale relazione può essere riscritta nel modo seguente:

$$(\star) \qquad (x_1, t_1) \sim (x_2, t_2) \iff \begin{cases} \exists\ i, \quad x_1 \in \ell_i, \\ x_2 = \psi_i(x_1), \\ t_2 = \Psi^{-1}_{\psi_i(x_1)}(\pi_1^*\varphi)^{-1}_{\psi_i(x_1)}(\pi_1^*\varphi)_{x_1}\Psi_{x_1}(t_1). \end{cases}$$

Denotiamo $\chi_{i,x} = \Psi^{-1}_{\psi_i(x)}(\pi_1^*\varphi)^{-1}_{\psi_i(x)}(\pi_1^*\varphi)_x\Psi_x$. Dato che $\chi_{i,x}$ è un isomorfismo lineare di $\mathbb{R}$ in sè, che varia con continuità al variare di $x \in \ell_i$, si ha che o $\chi_{i,x}$ conserva l'orientazione per ogni $x \in \ell_i$, oppure $\chi_{i,x}$ rovescia l'orientazione per ogni $x \in \ell_i$.

Sia allora ρ la distribuzioni di pesi definita da:

$$\rho_i = \begin{cases} 1 & \text{se } \chi_{i,x} \text{ conserva l'orientazione} \\ -1 & \text{se } \chi_{i,x} \text{ rovescia l'orientazione.} \end{cases}$$

Dal fatto che i lati ℓ_i sono contrattili, segue allora che è possibile trovare la banalizzazione Ψ del fibrato $\mathbf{E}_P$ in modo tale che le funzini $\chi_{i,x}$ siano date da:

$$\chi_{i,x}(t) = \begin{cases} t & \text{se } \rho_i = 1, \\ -t & \text{se } \rho_i = -1. \end{cases}$$

Con una tale scelta della banalizzazione, la relazione $(\star)$ si riduce alla relazione che definisce il fibrato $\mathbf{E}_\rho$, che è la tesi. $\blacksquare$

3.5. Fattorizzazioni con embeddings: il caso generale

Sia $F : S \to \mathbf{N}$ una applicazione generica, e sia $\pi : \mathbf{E} \to \mathbf{N}$ un fibrato in rette su $\mathbf{N}$; denotiamo come al solito con Γ il contorno apparente di F.

Si fissi un punto $\infty \in \mathbf{N}$, e sia $R = A \cup B \cup \Omega$ un sistema di segmenti per $F|_\Sigma$. Sia $\widetilde{S}$ la superficie ottenuta da S rimuovendo dei dischi aperti attorno ad ogni punto dell'immagine inversa di ∞, come in Proposizione 3.3.13, e sia U_∞ un intorno di ∞ tale che la sua chiusura sia diffeomorfa ad un disco e tale che $F(\widetilde{S}) \cap \bar{U}_\infty = \emptyset$.

Sia $\mathbf{N}_1 = \mathbf{N} - U_\infty$, per quanto visto nella sezione precedente, possiamo supporre che $\mathbf{E}|_{\mathbf{N}_1} = \mathbf{E}_\rho$, per una opportuna distribuzione di pesi, ρ su Ω.

Per Proposizione 3.3.13, il problema che ci proponiamo di risolvere in questa sezione, ossia trovare condizioni necessarie e sifficienti perchè F sia fattorizzabile in $\mathbf{E}$, è allora equivalente al problema di trovare condizioni necessarie e sufficienti affinchè l'applicazione $F|_{\widetilde{S}} : \widetilde{S} \to \mathbf{N}_1$ sia fattorizzabile in $\mathbf{E}_\rho$.

Osservazione 3.5.1. Analogamente a quanto visto in §3.1 e §3.3, l'applicazione $F|_{\widetilde{S}}$ è fattorizzabile in $\mathbf{E}_\rho$ se e solo se esiste una sezione σ del fibrato $\left(F|_{\widetilde{S}}\right)^*\mathbf{E}_\rho \to \widetilde{S}$, tale che $\pi_\rho^* F_1 \circ \sigma$ sia un embedding (cfr. il seguente diagramma).

$$\begin{array}{ccc}
(F|_{\tilde{S}})^*\mathbf{E}_\rho & \xrightarrow{\pi_\rho^* F|_{\tilde{S}}} & \mathbf{E}_\rho \\
{\scriptstyle (F|_{\tilde{S}})^*\pi_\rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_\rho} \\
\widetilde{S} & \xrightarrow[F|_{\tilde{S}}]{} & \mathbf{N}_1
\end{array}$$

Cerchiamo allora di capire cosa significhi dare una sezione del fibrato $(F|_{\widetilde{S}})^*\mathbf{E}_\rho$.

Sia S' la superficie ottenuta da $\widetilde{S}$ tagliando lungo gli archi di $F|_{\widetilde{S}}^{-1}(\Omega)$, e sia $\xi : S' \to \widetilde{S}$ l'applicazione che dà il taglio. Se $\varphi : P_{\mathbf{N}_1} \to \mathbf{N}_1$ denota l'applicazione che dà il taglio di $\mathbf{N}_1$ lungo gli archi di Ω (cfr. §3.4), è definita un'unica applicazione:

$$F' : S' \longrightarrow P_{\mathbf{N}_1}$$

tale che il seguente diagramma risulti commutativo:

$$\begin{array}{ccc} S' & \xrightarrow{F'} & P_{\mathbf{N}_1} \\ {\scriptstyle\xi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ \widetilde{S} & \xrightarrow[F|_{\tilde{S}}]{} & \mathbf{N}_1 \end{array}$$

Dalla commutatività di questo e del seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccccc} P_{\mathbf{N}_1}\times\mathbb{R} & \longleftarrow & \xi^*(F|_{\tilde{S}})^*\mathbf{E}_\rho & \longrightarrow & (F|_{\tilde{S}})^*\mathbf{E}_\rho & \longrightarrow & \mathbf{E}_\rho & \longleftarrow & P_{\mathbf{N}_1}\times\mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_\rho} & & \downarrow \\ P_{\mathbf{N}_1} & \xleftarrow[F']{} & S' & \xrightarrow[\xi]{} & \widetilde{S} & \xrightarrow[F|_{\tilde{S}}]{} & \mathbf{N}_1 & \xleftarrow[\varphi]{} & P_{\mathbf{N}_1} \end{array}$$

e dalla definizione del fibrato $\mathbf{E}_\rho$ (cfr. §3.4), segue allora che dare una sezione del fibrato $(F|_{\widetilde{S}})^*\mathbf{E}_\rho$ è equivalente a dare una sezione del fibrato $\xi^*(F|_{\tilde{S}})^*\mathbf{E}_\rho$ che passi a quoziente, ovvero a trovare una funzione $h : S' \to \mathbb{R}$ tale che:

$$(\bigstar)\qquad \begin{array}{l} \forall\ x_1, x_2 \in S' \text{ tali che } \xi(x_1) = \xi(x_2) \\ \qquad\qquad \text{risulta: } h(x_1) = \rho_i h(x_2) \text{ se } F(\xi(x_1)) = F(\xi(x_2)) \in \omega_i \end{array}$$

e che verifichi le analoghe condizioni sui differenziali, che ne garantiscano la differenziabilità a quoziente.

Denoteremo con σ_h la sezione di $(F|_{\widetilde{S}})^*\mathbf{E}_\rho$ ottenuta dalla funzione h, per passaggio a quoziente.

Proposizione 3.5.2. *L'applicazione* $\pi^*F|_{\widetilde{S}} \circ \sigma_h : \widetilde{S} \to \mathbf{E}_\rho$ *è un embedding se e solo se l'applicazione:*

$$(F', h) : S' \longrightarrow P_{\mathbf{N}_1} \times \mathbb{R}$$

è un embedding.

DIM: Ovvia dalle definizioni. ∎

Definizione 3.5.3. *Data un'applicazione generica* $F : S \to \mathbf{N}$, *ed un sistema di segmenti per* $F|_\Sigma$, *diremo che* $h : S' \to \mathbb{R}$ *è una altezza* bizzarra *per* F, *se verifica la condizione* $(\bigstar)$ *ed inoltre* (F', h) *è un embedding.*

Introduciamo alcune notazioni. Denotiamo con $\widetilde{H}(F) = \big(H(F) \cap \widetilde{S}\big) \cup \partial\widetilde{S}$ e con $H'(F) \subset S'$ l'insieme $H'(F) = \xi^{-1}\big(\widetilde{H}(F)\big)$. Denotiamo inoltre con $\mathcal{C}$ l'insieme delle componenti connesse di $S - H(F)$, con $\widetilde{\mathcal{C}}$ l'insieme delle componenti connesse di $\widetilde{S} - \widetilde{H}(F)$ e con $\mathcal{C}'$ l'insieme delle componenti connesse di $S' - H'(F)$.

Proposizione 3.5.4. *L'inclusione mette in corrispondenza biunivoca $\widetilde{\mathcal{C}}$ con $\mathcal{C}$, mentre l'applicazione $\xi : S' \to \widetilde{S}$ mette in corrispondenza biunivoca $\mathcal{C}'$ con $\widetilde{\mathcal{C}}$.*

DIM: La prima delle due asserzioni segue dall'osservare che, per come è costruita $\widetilde{S}$, se $C \in \mathcal{C}$ allora la parte interna di $C \cap \widetilde{S}$ è connessa. Per quanto riguarda la seconda, segue dal fatto che, per definizione, l'applicazione ξ ristretta alle componenti connesse di $S' - \xi^{-1}F^{-1}(\Omega)$ è un diffeomorfismo. ❏

Se $C \in \mathcal{C}$, denoteremo con $\widetilde{C} \in \widetilde{\mathcal{C}}$ la parte interna di $\widetilde{S} \cap C$, e con $C' \in \mathcal{C}'$ la componente tale che $\xi(C') = \widetilde{C}$.

Proposizione 3.5.5. *Siano C_1, $C_2 \in \mathcal{C}$, allora:*

$$F(C_1) \cap F(C_2) \neq \varnothing \iff F(\widetilde{C}_1) \cap F(\widetilde{C}_2) \neq \varnothing$$

DIM: Una implicazione è banale. Supponiamo allora che $F(C_1) \cap F(C_2) \neq \varnothing$ ma che $F(\widetilde{C}_1) \cap F(\widetilde{C}_2) = \varnothing$. Evidentemente, dato che, per costruzione, $F(\widetilde{S}) \subset \mathbf{N}_1 = \mathbf{N} - U_\infty$, necessariamente deve aversi $F(C_1) \cap F(C_2) \subset U_\infty$, e quindi $\partial\big(F(C_1) \cap F(C_2)\big) \subset U_\infty$. Ma $\partial\big(F(C_1) \cap F(C_2)\big)$ contiene necessariamente pezzi di Γ, e ciò è assurdo in quanto si è scelto U_∞ in modo che $\Gamma \cap U_\infty = \varnothing$. ❏

Proposizione 3.5.6. *Siano $\widetilde{C}_1$, $\widetilde{C}_2 \in \widetilde{\mathcal{C}}$, allora $F(\widetilde{C}_1) \cap F(\widetilde{C}_2)$ è connesso.*

DIM: La stessa di Proposizione 3.3.12. ❏

Proposizione 3.5.7. *Siano C_1', $C_2' \in \mathcal{C}'$, allora $F'(C_1') \cap F'(C_2')$ è connesso.*

DIM: Dato che $\varphi \circ F' = F \circ \xi$, si ha che:

$$F\big(\xi(C_1')\big) \cap F\big(\xi(C_2')\big) = \varphi\big(F'(C_1')\big) \cap \varphi\big(F'(C_2')\big).$$

Per la proposizione precedente, sappiamo che $F\big(\xi(C_1')\big) \cap F\big(\xi(C_2')\big)$ è connesso. D'altra parte, $F'(C_1')$ ed $F'(C_2')$ sono contenuti nella parte interna del poligono $P_{\mathbf{N}_1}$ e φ ristretta alla parte interna di $P_{\mathbf{N}_1}$ è un diffeomorfismo. Da ciò se ne deduce la tesi. ❏

Supponiamo ora che $F : S \to \mathbf{N}$ sia fattorizzabile in $\mathbf{E}$, e sia $h : S' \to \mathbb{R}$ una altezza *bizzarra* per F.

Proposizione 3.5.8. *Siano $C'_1,\ C'_2 \in \mathcal{C}'$ tali che $F'(C'_1) \cap F'(C'_2) \neq \emptyset$. Allora vale una ed una sola delle seguenti due:*

(1) $\forall x \in C'_1,\ y \in C'_2$ *t. c.* $F'(x) = F'(y)$ *risulta* $h(x) < h(y)$;

(2) $\forall x \in C'_1,\ y \in C'_2$ *t. c.* $F'(x) = F'(y)$ *risulta* $h(x) > h(y)$.

DIM: La stessa di Proposizione 3.3.14. ∎

Anche in questo caso, come nel caso del fibrato banale (cfr. §3.3), possiamo dotare l'insieme $\mathcal{C}'$ di una struttura di grafo orientato ponendo:

$$\forall\ C'_1,\ C'_2 \in \mathcal{C}' \qquad C'_1 \to C'_2 \iff \text{vale la (1) di Proposizione 3.5.8.}$$

Si può indurre la struttura di grafo orientato anche sull'insieme $\mathcal{C}$ ponendo:

$$\forall\ C_1,\ C_2 \in \mathcal{C} \qquad C_1 \to C_2 \iff C'_1 \to C'_2;$$

Chiameremo questo grafo il grafo associato all'altezza *bizzarra* h, e lo indicheremo con $L(h)$.

Osservazione 3.5.9. Osserviamo che da Proposizione 3.5.5 segue immediatamente che per ogni $C_1,\ C_2 \in \mathcal{C}$ risulta che:

$$F(C_1) \cap F(C_2) \neq \emptyset \iff F'(C'_1) \cap F'(C'_2) \neq \emptyset\,.$$

Pertanto due componenti $C_1,\ C_2 \in \mathcal{C}$ sono congiunte da un lato in $L(h)$ se e soltanto se $F(C_1) \cap F(C_2) \neq \emptyset$. Quindi la situazione è del tutto analoga a quella che si aveva nel caso del fibrato banale.

Proposizione 3.5.10. *Il grafo $L(h)$ non ha loop.*

DIM: Esattamente la stessa di Proposizione 3.3.16. ∎

Vale anche in questo caso un analogo di Proposizione 3.3.17. Denotiamo con $\Omega^- = \{\omega \in \Omega \mid \rho(\omega) = -1\}$. Vale la seguente:

Proposizione 3.5.11. *Sia F fattorizzabile in $\mathbf{E}$, e siano $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathcal{C}$, ℓ, ℓ_1, ℓ_2, lati del grafo $H(F)$, valgono le seguenti proprietà:*

(A) *se C_1, C_2 sono adiacenti lungo ℓ (ovvero $\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2 \supseteq \ell$) ed $F(C_3) \cap F(\ell) \neq \varnothing$ allora:*

$$C_1 \to C_3 \text{ e } C_2 \to C_3, \quad \textit{oppure} \quad C_3 \to C_1 \text{ e } C_3 \to C_2;$$

(B) *se C_1, C_2 sono adiacenti lungo ℓ_1 e C_3, C_4 lungo ℓ_2 con $F(\ell_1) \cap F(\ell_2) \neq \varnothing$, essendo $F(C_1)$, $F(C_3)$ sul lato sinistro del segmento r ed $F(C_2)$, $F(C_4)$ sul suo lato destro, dove $r \in R$ denota il segmento tale che $F(\ell_i) \subset r$, allora:*

$$C_1 \to C_3 \text{ e } C_2 \to C_4; \quad \textit{oppure} \quad C_3 \to C_1 \text{ e } C_4 \to C_2; \quad \textit{se } r \in R - \Omega^-;$$
$$C_1 \to C_3 \text{ e } C_4 \to C_2; \quad \textit{oppure} \quad C_3 \to C_1 \text{ e } C_2 \to C_4; \quad \textit{se } r \in \Omega^-.$$

Dim: Per quanto riguarda la (A), osserviamo che una tale situazione si può avere soltanto se l'immagine dell'arco ℓ è contenuta o in Γ (il contorno apparente di F) o in un segmento che non sta in Ω; inoltre è facile vedere che se $x_1 \in \ell$ e $x_2 \in C_3$ sono tali che $F(x_1) = F(x_2)$ necessariamente x_1 ed x_2 stanno in $\widetilde{S}$. In altri termini ci si riconduce a dimostrare la seguente:

Siano C_1', C_2', $C_3' \in \mathcal{C}'$ e sia ℓ' un lato di $H'(F)$ non contenuto in $\partial S'$. Se C_1' e C_2' sono adiacenti lungo ℓ' ed $F'(\ell') \cap F'(C_3') \neq \varnothing$, allora

$$C_1' \to C_3' \text{ e } C_2' \to C_3', \quad \textit{oppure} \quad C_3' \to C_1' \text{ e } C_3' \to C_2'.$$

Evidentemente, la stessa argomentazione usata per dimostrare la (A) di Proposizione 3.3.17, dimostra la tesi.

Vediamo ora la (B). Se $F(\ell_1)$ ed $F(\ell_2)$ sono contenuti in un segmento di $R - \Omega$, come nel caso precedente, ci si riconduce a dimostrare la stessa tesi per il grafo delle componenti $\mathcal{C}'$ ed anche in questo caso la dimostrazione è identica a quella di Proposizione 3.3.17.

Supponiamo allora che $F(\ell_1), F(\ell_2) \subset \omega \in \Omega$. Siano $x_1 \in \ell_1$ ed $x_2 \in \ell_2$ tali che $F(x_1) = F(x_2)$. Anche in questo caso, possiamo supporre che $x_1, x_2 \in \widetilde{S}$. Siano allora ℓ_1' ed ℓ_1'' i lati di $H'(F)$ tali che $\xi(\ell_1') = \xi(\ell_1'') = \ell_1$ ed ℓ_2' ed ℓ_2'' i lati tali che $\xi(\ell_2') = \xi(\ell_2'') = \ell_2$. L'ipotesi di (B) sulle componenti C_1, C_2, C_3 e C_4 si traduce allora nella seguente sulle componenti C_1', C_2', C_3' e C_4':

> *C_1' è adiacente ad ℓ_1', C_2' è adiacente ad ℓ_1'', C_3' è adiacente ad ℓ_2', C_4' è adiacente ad ℓ_2''; ed $F'(C_1') \cap F'(C_3') \neq \varnothing$ ed $F'(C_2') \cap F'(C_4') \neq \varnothing$.*

Siano allora x_1', x_1'', x_2', x_2'' i punti tali che:

$$x_i' \in \ell_i', \quad \text{e} \quad \xi(x_i') = \xi(x_i'') = x_i \qquad i = 1, 2.$$

Non è difficile mostrare che si possono trovare (vedi Fig. 47) quattro archi:

$$\gamma_i' : [0,1] \to S' \quad \gamma_i'' : [1,2] \to S' \qquad i = 1, 2$$

tali che:

(1) $\quad \gamma_i'(1) = x_i'$ e $\gamma_i''(1) = x_i'' \qquad i = 1, 2;$

(2) $\quad \forall\ t \neq 1 \quad \begin{cases} \gamma_1'(t) \in C_1', & \gamma_1''(t) \in C_2', \\ \gamma_2'(t) \in C_3', & \gamma_2''(t) \in C_4'; \end{cases}$

(3) $\quad \forall\ t \quad \begin{cases} F'(\gamma_1'(t)) = F'(\gamma_2'(t)), \\ F'(\gamma_1''(t)) = F'(\gamma_2''(t)). \end{cases}$

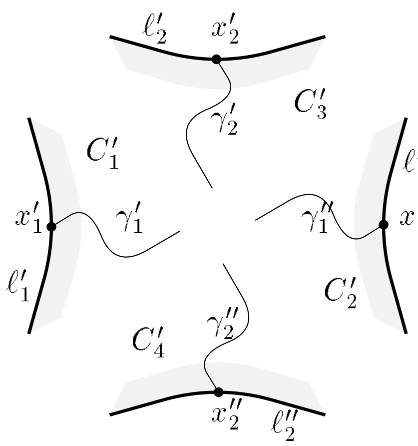


Fig. 47

Ma allora, per definizione di altezza *bizzarra*, dalla (1) segue che le funzioni $g_1, g_2 : [0,2] \to \mathbb{R}$, definite da:

$$g_1(t) = \begin{cases} h(\gamma_1'(t)) & \text{se } t \in [0,1] \\ \rho(\omega) h(\gamma_1''(t)) & \text{se } t \in [1,2] \end{cases} \qquad g_2(t) = \begin{cases} h(\gamma_2'(t)) & \text{se } t \in [0,1] \\ \rho(\omega) h(\gamma_2''(t)) & \text{se } t \in [1,2] \end{cases}$$

sono continue.

Distinguiamo i due casi:

i) $\omega \in \Omega^+ = \omega - \Omega^-$;

ii) $\omega \in \Omega^-$.

Nel primo caso, se non valesse la tesi, vorrebbe dire che:

$$C_1' \to C_3' \quad \text{e} \quad C_4' \to C_3'.$$

Ma allora, per come è definita $\to$, dalle (2) e (3) segue che:

$$\forall\ t < 1 \quad g_1(t) < g_2(t) \qquad \text{e} \qquad \forall\ t > 1 \quad g_1(t) > g_2(t).$$

Ma allora necessariamente $g_1(1) = g_2(1)$, e quindi si ottiene:

$$F'(x_1') = F'(x_2') \qquad \text{e} \qquad h(x_1') = h(x_2'),$$

che è assurdo in quanto per ipotesi h è un'altezza *bizzarra* per F, ossia (F', h) è iniettiva.

Nel secondo caso, se non valesse la tesi, si avrebbe:

$$C_1' \to C_3' \text{ e } C_3' \to C_4',$$

e quindi, tenendo conto che $\rho(\omega) = -1$, anche in questo caso si avrebbe:

$$\forall\ t < 1 \quad g_1(t) < g_2(t) \qquad \text{e} \qquad \forall\ t > 1 \quad g_1(t) > g_2(t).$$

Da cui, nuovamente, l'assurdo. ❏

Come ci si aspetta, le Proposizioni 3.5.10 e 3.5.11 danno condizioni necessarie e sufficienti affinchè un'applicazione generica $F : S \to \mathbf{N}$ sia fattorizzabile il $\mathbf{E}$, nel senso dato dal seguente:

Teorema 3.5.12. *Siano $F : S \to \mathbf{N}$ una applicazione generica, R un sistema di segmenti per $F|_\Sigma$ ed $\mathbf{E}$ un fibrato in rette su $\mathbf{N}$. Con le notazioni introdotte in questa sezione, F è fattorizzabile in $\mathbf{E}$ se e soltanto se si può dotare l'insieme $\mathcal{C}$ delle componenti di $S - H(F)$ di una struttura di grafo orientato senza loop che verifichi le condizioni di compatibilità* (A) *e* (B) *di Proposizione 3.5.11.*

DIM: La dimostrazione è completamente analoga a quella del Teorema 3.3.19, prima si definisce una altezza *bizzarra* per la restrizione di F ad S meno un intorno tubolare di Σ e quindi si estende questa altezza all'intorno tubolare in questione.

Il modo di definire l'altezza *bizzarra* per la restrizione di F ad S meno un intorno tubolare di Σ, è sostanzialmente lo stesso usato nel caso del fibrato banale, in quanto si deve definire una altezza "vera" per l'applicazione $F' : S' \to P_{\mathrm{N}_1}$. L'unica accortezza che bisogna avere è nel fare in modo che sia verificata la condizione ($\bigstar$), ma che ciò sia possibile, è garantito dalla condizione (B).

Per quanto riguarda invece l'estensione all'intorno tubolare di σ, in modo del tutto analogo al caso del fibrato banale, la condizione (A) garantisce la locale estensione dell'altezza attorno alle cuspidi, mentre la (B) permette di raccordare tali estensioni locali. ∎

Osservazione 3.5.13. Ripetendo pedissequamente le dimostrazioni di questa sezione, si può dimostrare un analogo teorema di fattorizzazione mediante embedding per le immersioni. Più precisamente, se $F : S \to \mathbf{N}$ è una immersione, detto $G(F) \subset S$ il grafo ottenuto dal bordo di S aggiungendovi gli archi di $F^{-1}(R)$ che hanno entrambi gli estremi su $\partial S \cup F^{-1}(\infty)$, si dimostra che $G(F)$ è l'1–scheletro di una cellularizzazione di S tale che la restrizione di F alla parte interna di ciascuna 2–cella è un diffeomorfismo con l'immagine. (Nel Capitolo 1, §1.11 questo fatto è dimostrato nel caso $F^{-1}(\infty) = \emptyset$, ma la stessa dimostrazione si applica anche al caso generale).

Detto $\mathcal{C}$ l'insieme delle 2–celle di tale cellularizzazione, si dimostra allora il seguente teorema di fattorizzazione mediante embedding per immersioni:

Teorema 3.5.14. *L'immersione $F : S \to \mathbf{N}$ è fattorizzabile mediante un embedding $\widetilde{F} : S \to \mathbf{E}$ se e solo se si può dotare l'insieme $\mathcal{C}$ di una struttura di grafo orientato senza loop, che verifichi le condizioni* (A) *e* (B) *di Proposizione 3.5.11, ovviamente interpretate in questo contesto.*

3.6. Alcuni esempi

Esempio 1. Diamo ora un esempio di una curva piana che ha cinque estensioni non equivalenti ad immersioni del disco, (si veda anche [**Po**] in cui per ogni $n \in \mathbb{N}$ si costruisce una curva che ha esattamente n estensioni non equivalenti ad immersioni del disco), di cui tre sono fattorizzabili con embedding in $\mathbb{R}^3$ ma le restanti due no. Sia Γ la curva data in Fig. 48, munita del lato indotto dall'orientazione. In figura abbiamo tracciato soltanto tre segmenti in quanto da tutte le altre componenti connesse di $\mathbb{R}^2 - \Gamma$ si possono tracciare segmenti che hanno con la curva soltanto intersezioni positive, pertanto i tre segmenti costituiscono un sistema ridotto di segmenti per la curva.

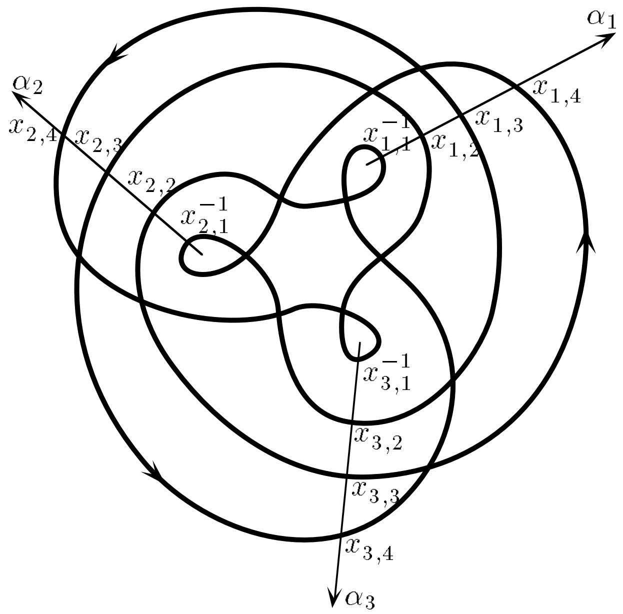


Fig. 48

Tale sistema ridotto di segmenti, produce allora la seguente parola per la curva:

$$w = x_{1,4}\ x_{2,1}^{-1}\ x_{3,2}\ x_{1,3}\ x_{2,4}\ x_{3,1}^{-1}\ x_{1,2}\ x_{2,3}\ x_{3,4}\ x_{1,1}^{-1}\ x_{2,2}\ x_{3,3}.$$

Abbiamo omesso l'indice ausiliario μ in quanto, essendo il lato quello indotto dall'orientazione, coincide con l'esponente.

Non è difficile vedere che il numero di rotazione di questa curva è esattamente 1 e che gli unici assemblaggi minimali (genere 0) sono i seguenti cinque:

$$\mathfrak{A}_1 = \big\{\{x_{1,1}^{-1}, x_{1,4}\}, \{x_{2,1}^{-1}, x_{2,4}\}, \{x_{3,1}^{-1}, x_{3,4}\}\big\};$$
$$\mathfrak{A}_2 = \big\{\{x_{1,1}^{-1}, x_{1,2}\}, \{x_{2,1}^{-1}, x_{2,2}\}, \{x_{3,1}^{-1}, x_{3,2}\}\big\};$$
$$\mathfrak{A}_3 = \big\{\{x_{1,1}^{-1}, x_{1,4}\}, \{x_{2,1}^{-1}, x_{2,3}\}, \{x_{3,1}^{-1}, x_{3,2}\}\big\};$$
$$\mathfrak{A}_4 = \big\{\{x_{1,1}^{-1}, x_{1,2}\}, \{x_{2,1}^{-1}, x_{2,4}\}, \{x_{3,1}^{-1}, x_{3,3}\}\big\};$$
$$\mathfrak{A}_5 = \big\{\{x_{1,1}^{-1}, x_{1,3}\}, \{x_{2,1}^{-1}, x_{2,2}\}, \{x_{3,1}^{-1}, x_{3,4}\}\big\}.$$

Per quanto riguarda la fattorizzabilità delle corrispondenti immersioni, mediante enbedding in $\mathbb{R}^3$, non è difficile mostrare che le applicazioni corrispondenti ad $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$ ed $\mathfrak{A}_5$ sono fattorizzabili, mentre le altre due no. Esaminiamo ad esempio il caso dell'applicazione corrispondente all'assemblaggio $\mathfrak{A}_1$.

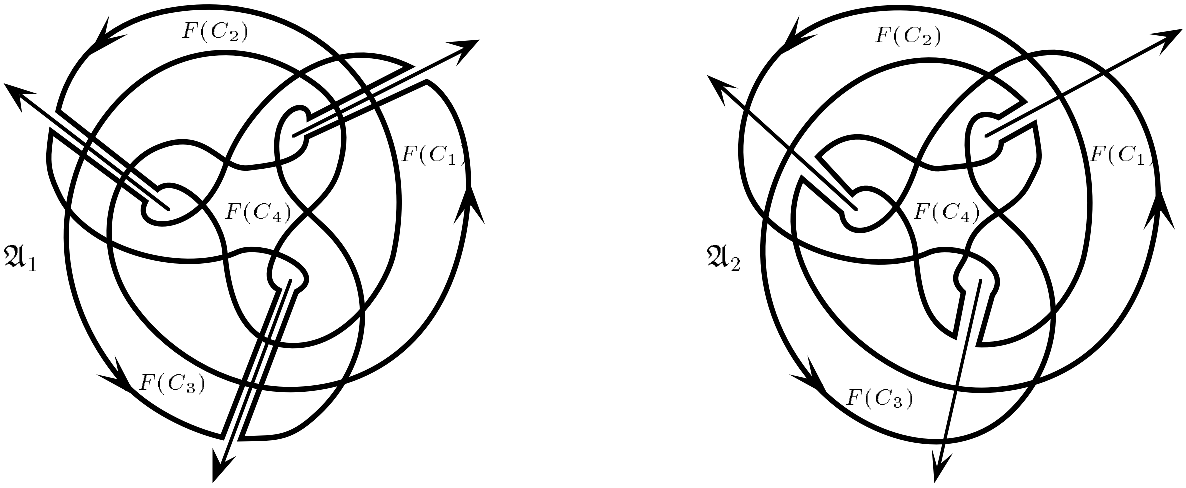


Fig. 49

Si scopre immediatamente (vedi Fig. 49) che, dette C_i, con $i = 1, \ldots, 4$, le quattro celle della decomposizione indotta dal sistema di segmenti, la cella C_1 si attacca a C_4 lungo $\left[x_{1,1}^{-1}, x_{1,4}\right]$, la cella C_2 si attacca a C_4 lungo $\left[x_{2,1}^{-1}, x_{2,4}\right]$, C_3 si attacca a C_4 lungo $\left[x_{3,1}^{-1}, x_{3,4}\right]$; inoltre:

$$\begin{array}{ll}
F(C_2) \cap \left(x_{1,1}^{-1}, x_{1,4}\right) \neq \varnothing; & F(C_3) \cap \left(x_{1,1}^{-1}, x_{1,4}\right) \neq \varnothing; \\
F(C_1) \cap \left(x_{2,1}^{-1}, x_{2,4}\right) \neq \varnothing; & F(C_3) \cap \left(x_{2,1}^{-1}, x_{2,4}\right) \neq \varnothing; \\
F(C_1) \cap \left(x_{3,1}^{-1}, x_{3,4}\right) \neq \varnothing; & F(C_2) \cap \left(x_{3,1}^{-1}, x_{3,4}\right) \neq \varnothing;
\end{array}$$

che significa che il grafo che descrive la fattorizzazione dovrebbe soddisfare le condizioni:

$$\begin{array}{lll}
C_2 \leftrightarrows C_1, C_4; & C_1 \leftrightarrows C_2, C_4; & C_1 \leftrightarrows C_3, C_4; \\
C_3 \leftrightarrows C_1, C_4; & C_3 \leftrightarrows C_2, C_4; & C_2 \leftrightarrows C_3, C_4;
\end{array}$$

ed una facile analisi dei casi possibili mostra che un grafo che soddisfi tali condizioni deve necessariamente avere dei loop. In altre parole l'immersione corrispondente all'assemblaggio $\mathfrak{A}_1$ non è fattorizzabile. Un'analisi del tutto analoga mostra che anche l'immesione corrispondente all'assemblaggio $\mathfrak{A}_2$ non è fattorizzabile, mentre le immersioni corrispondenti agli altri tre assemblaggi lo sono (cfr. Fig. 50).

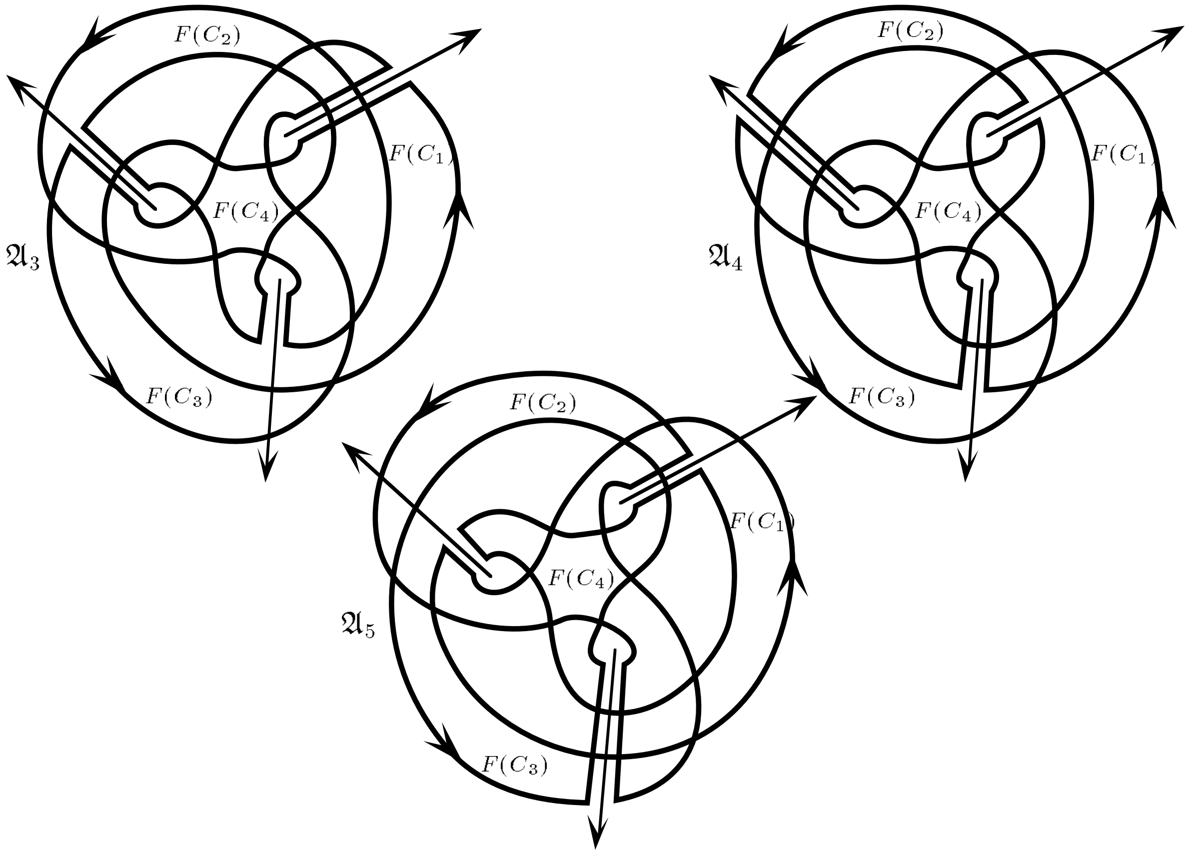


Fig. 50

Interpretando la stessa curva come "contorno apparente", non è difficile verificare che si trovano esattamente 15 assemblaggi non equivalenti, corrispondenti a 15 estensioni generiche, non equivalenti, dalla sfera nel piano, della curva Γ. Osserviamo innanzitutto che l'unica deformazione che può portare ad assemblaggi minimali è la deformazione $(D, H) = \big(\varnothing, \{1, \varnothing\}\big)$, corrispondente ad effettuare una deformazione di primo tipo di f (in particolare $k_H = 2$). Questo segue dal fatto che se $\mathbf{A} = \big((D, H), \mathfrak{A}\big)$ é un assemblaggio minimale per tale curva, allora:

$$2R(f) = 2l(\mathbf{A}) - k_H - h(\mathbf{A}) = 2l(\mathbf{A}) - k_H - 2g(\mathbf{A});$$

(la seconda uguaglianza deriva dal fatto che $\mathbb{R}^2$ è orientabile, e quindi il grafo associato ad un assemblaggio di una curva è sempre positivo) da cui segue immediatamente che

k_H, è pari. Lo stesso ragionamento appena fatto dimostra la seguente:

Proposizione 3.6.1. *Sia* $\mathbf{N}$ *una superficie orientabile e sia* $F : S \to \mathbf{N}$ *una applicazione generica tale che* Σ_F *sia connesso e tale che il suo contorno apparente abbia un numero pari di cuspidi. Allora l'intorno tubolare di* Σ_F *è orientabile.* ∎

Come conseguenza di tale proposizione e del Teorema 3.1.1 si ha allora:

Proposizione 3.6.2. *Se* F *è come nella proposizione precedente, allora* F *è fattorizzabile con una immersione in un fibrato* $\pi : \mathbf{E} \to \mathbf{N}$ *se e solo se il fibrato* $\left(F|_\Sigma\right)^* \mathbf{E}$ *è banale.* ∎

In particolare, allora, un'applicazione F, con le proprietà delle proposizioni precedenti, è sempre fattorizzabile con una immersione in $\mathbf{N} \times \mathbb{R}$.

Tornando all'esempio, osserviamo ora che se $\mathbf{A}$ è minimale, allora $l(\mathbf{A}) = 2$. Infatti se si avesse $l(\mathbf{A}) = 1$, dalla relazione di minimalità seguirebbe $2 = -2g(\mathbf{A})$ che è di nuovo palesemente assurdo. In definitiva, l'unica possibilità che rimane aperta è per assemblaggi con $k_H = 2$ ed $l(\mathbf{A}) = 2$. Per quanto visto in Osservazione 1.5.19 ogni componente dell'assemblaggio deve essere minimale per la curva cui si riferisce, pertanto gli assemblaggi minimali della curva sono i seguenti:

$$\mathbf{A}_{i,j} = \Big\{ \big(\varnothing, \{1, \varnothing\}\big), \mathfrak{A}_i \amalg \mathfrak{A}_j \Big\} \qquad i, j = 1, \ldots, 5.$$

Dove gli $\mathfrak{A}_i$ sono gli assemblaggi visti sopra. Evidentemente per ogni i, j, l, m si ha che $\mathbf{A}_{i,j} \sim \mathbf{A}_{l,m} \iff \{i, j\} = \{l, m\}$, e quindi si hanno esattamente le quindici classi di assemblaggi minimali rappresentate da:

$$\mathbf{A}_{i,j} \qquad i, j = 1, \ldots, 5 \text{ e } i \leq j.$$

Per quanto riguarda la fattorizzabilità di queste applicazioni, osserviamo che, detta $F_{i,j}$ l'applicazione corrispondente all'assemblaggio $\mathbf{A}_{i,j}$, sicuramente le applicazioni $F_{i,j}$ con i o j uguale a 1 o 2, non sono fattorizzabili, in quanto per tali assemblaggi valgono le stesse considerazioni fatte nel caso delle immersioni; una analisi in tutto simile alla precedente, ma soltanto un po' più complicata, mostra che soltanto le applicazioni $F_{i,i}$ con $i = 3, 4, 5$ sono fattorizzabili mediante un embedding in $\mathbb{R}^3$.

Esempio 2. Sia Γ la curva in Fig. 51, generata dalla "catastrophe machine" di Zeemann [**Z**], e consideriamo Γ immersa nel piano proiettivo, ottenuto identificando i due lati del 2–agono in figura. Anche in questo caso abbiamo tracciato soltanto i segmenti uscenti dalle cuspidi ed il generatore di $\pi_1(\mathbb{RP}^2, \infty)$ in quanto l'unico altro segmento necessario per ottenere un sistema di segmenti, quello uscente dall'interno della curva, può essere tracciato in modo da produrre soltanto intersezioni positive, e quindi è ininfluente al fine di determinare gliassemblaggi.

Numero di rotazione della curva:

$R_X(f) = 1$

Parola della curva:

$w = y^{-1}_{1,1,-}\ y^{-1}_{2,1,-}\ y^{-1}_{3,1,-}\ y^{-1}_{4,1,-}$

Parola della espansione:

$u = x^{-1}_{1,1,-}\ y_{1,2,+}\ y_{2,2,+}\ x_{1,2,-}\ y_{4,2,-}\ y_{3,2,-}$

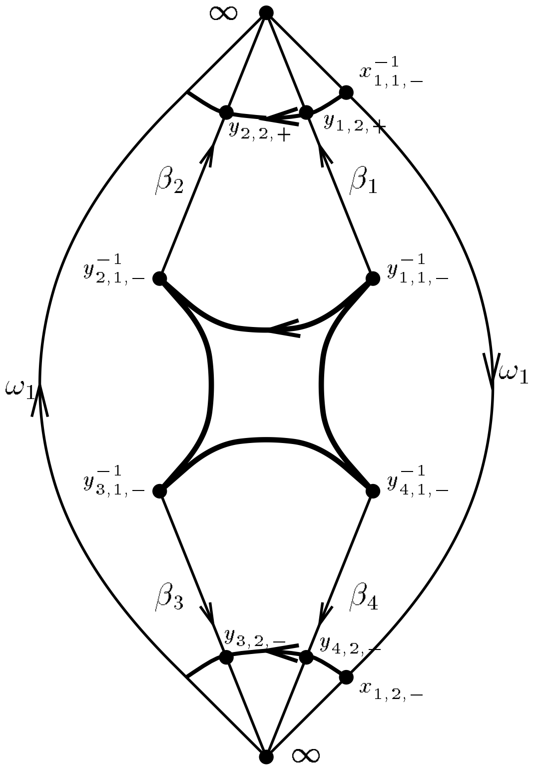


Fig. 51

Per la parola w, si hanno due sole partizioni possibili:

$$\text{(a) } H_1 = \{1\},\ H_2 = \varnothing; \qquad \text{(b) } H_1 = \varnothing,\ H_2 = \{1\};$$

mentre le deformazioni possibili, a meno di complementazione sono otto:

(1) $D = \varnothing$;	(3) $D = \{2\}$;	(5) $D = \{4\}$	(7) $D = \{2, 3\}$;
(2) $D = \{1\}$;	(4) $D = \{3\}$;	(6) $D = \{1, 2\}$;	(8) $D = \{1, 3\}$.

Daremo ora una lista di tutti gli assemblaggi minimali, corrispondenti ad applicazioni definite su superficie connesse.

Osservazione 3.6.3. Osserviamo che per $\beta = 0$ non ci sono assemblaggi, in quanto non ci sono lettere positive alle quali accoppiare le quattro lettere negative, ossia non esistono applicazioni $F : S \to \mathbb{RP}^2$ che hanno la curva Γ come contorno apparente tali che $F^{-1}(\infty) = \emptyset$. Osserviamo inoltre che la relazione:

$$2R_X(f) - c + \beta\chi(\mathbf{N}) = \chi(S),$$

nel nostro caso si riduce a:

$$-2 + \beta = \chi(S),$$

da cui, se S è una superficie connessa, $\chi(S) \leq 2$, e quindi $\beta \leq 4$, ossia sarà sufficiente cercare β–assemblaggi con $\beta \leq 4$. Osserviamo infine, che $\beta = 4$ implica che la eventuale superficie connessa S ha caratteristica di Eulero uguale a due, ossia è una sfera, sarà quindi superfluo cercare 4–assemblaggi minimali corrispondenti alla scelta (b) della partizione, che corrisponde ad avere un intorno tubolare non orientabile del luogo critico.

La β–espansione della parola deformata $w_{(D,H)}$ si ottiene aggiungendogli le parole u_i, definite nel modo seguente:

$$\text{se } \beta = 1 \qquad u_1 = x^{-1}_{1,1,-}\ y_{1,2,+}\ y_{2,2,+}\ x_{1,2,-}\ y_{4,2,-}\ y_{3,2,-}$$

$$\text{se } \beta = 2 \qquad \begin{cases} u_1 = x^{-1}_{1,1,-}\ y_{1,3,+}\ y_{2,3,+}\ x_{1,4,-}\ y_{4,3,-}\ y_{3,3,-} \\ u_2 = x^{-1}_{1,2,-}\ y_{1,2,+}\ y_{2,2,+}\ x_{1,3,-}\ y_{4,2,-}\ y_{3,2,-} \end{cases}$$

$$\text{se } \beta = 3 \qquad \begin{cases} u_1 = x^{-1}_{1,1,-}\ y_{1,4,+}\ y_{2,4,+}\ x_{1,6,-}\ y_{4,4,-}\ y_{3,4,-} \\ u_2 = x^{-1}_{1,2,-}\ y_{1,3,+}\ y_{2,3,+}\ x_{1,5,-}\ y_{4,3,-}\ y_{3,3,-} \\ u_3 = x^{-1}_{1,3,-}\ y_{1,2,+}\ y_{2,2,+}\ x_{1,2,-}\ y_{4,4,-}\ y_{3,2,-} \end{cases}$$

$$\text{se } \beta = 4 \qquad \begin{cases} u_1 = x^{-1}_{1,1,-}\ y_{1,5,+}\ y_{2,5,+}\ x_{1,8,-}\ y_{4,5,-}\ y_{3,5,-} \\ u_2 = x^{-1}_{1,2,-}\ y_{1,4,+}\ y_{2,4,+}\ x_{1,7,-}\ y_{4,4,-}\ y_{3,4,-} \\ u_3 = x^{-1}_{1,3,-}\ y_{1,3,+}\ y_{2,3,+}\ x_{1,6,-}\ y_{4,3,-}\ y_{3,3,-} \\ u_4 = x^{-1}_{1,4,-}\ y_{1,2,+}\ y_{2,2,+}\ x_{1,2,-}\ y_{4,5,-}\ y_{3,2,-} \end{cases}$$

Partizione (a).

Deformazione (1). La parola deformata è data da: $w_{(D,H)} = \{w, \varnothing\}$.

$\beta = 1$.

Evidentemente si ha un solo 1–assemblaggio: $\mathbf{A}_1 = \big\{(D,H), \mathfrak{A}_1\big\}$ con $\mathfrak{A}_1$ dato dalle coppie:

$$\mathfrak{A}_1 = \left\{ \begin{matrix} \{y_{1,1,-}^{-1}, y_{1,2,+}\} & \{y_{2,1,-}^{-1}, y_{2,2,+}\} & \{y_{3,1,-}^{-1}, y_{3,2,-}\} \\ \{y_{4,1,-}^{-1}, y_{4,2,-}\} & \{x_{1,1,-}^{-1}, x_{1,2,-}\} & \end{matrix} \right\}$$

per il quale si ha:

$$g(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}) = 2, \quad l(\mathbf{A}) = 2, \quad k_H = 2,$$

ossia l'assemblaggio è minimale e corrisponde ad una applicazione dalla superficie non orientabile di genere 3 (ovvero: $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$).

$\beta = 2$.

A meno di equivalenza (data dall'azione di $\mathfrak{S}_2$) si trovano cinque 2–assemblaggi minimali, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$, $\mathbf{A}_5$, $\mathbf{A}_6$, corrispondenti ad aplicazioni definite su superficie connesse, dati dai seguenti insiemi di coppie:

$$\mathfrak{A}_2 = \left\{ \begin{matrix} \{y_{1,1,-}^{-1}, y_{1,3,+}\} & \{y_{2,1,-}^{-1}, y_{2,3,+}\} & \{y_{3,1,-}^{-1}, y_{3,3,-}\} \\ \{y_{4,1,-}^{-1}, y_{4,3,-}\} & \{x_{1,1,-}^{-1}, x_{1,3,-}\} & \{x_{1,2,-}^{-1}, x_{1,4,-}\} \end{matrix} \right\}$$

$$\mathfrak{A}_3 = \left\{ \begin{matrix} \{y_{1,1,-}^{-1}, y_{1,3,+}\} & \{y_{2,1,-}^{-1}, y_{2,3,+}\} & \{y_{3,1,-}^{-1}, y_{3,2,-}\} \\ \{y_{4,1,-}^{-1}, y_{4,2,-}\} & \{x_{1,1,-}^{-1}, x_{1,3,-}\} & \{x_{1,2,-}^{-1}, x_{1,4,-}\} \end{matrix} \right\}$$

$$\mathfrak{A}_4 = \left\{ \begin{matrix} \{y_{1,1,-}^{-1}, y_{1,3,+}\} & \{y_{2,1,-}^{-1}, y_{2,3,+}\} & \{y_{3,1,-}^{-1}, y_{3,2,-}\} \\ \{y_{4,1,-}^{-1}, y_{4,2,-}\} & \{x_{1,1,-}^{-1}, x_{1,4,-}\} & \{x_{1,2,-}^{-1}, x_{1,3,-}\} \end{matrix} \right\}$$

$$\mathfrak{A}_5 = \left\{ \begin{matrix} \{y_{1,1,-}^{-1}, y_{1,3,+}\} & \{y_{2,1,-}^{-1}, y_{2,2,+}\} & \{y_{3,1,-}^{-1}, y_{3,3,-}\} \\ \{y_{4,1,-}^{-1}, y_{4,2,-}\} & \{x_{1,1,-}^{-1}, x_{1,3,-}\} & \{x_{1,2,-}^{-1}, x_{1,4,-}\} \end{matrix} \right\}$$

$$\mathfrak{A}_6 = \left\{ \begin{matrix} \{y_{1,1,-}^{-1}, y_{1,3,+}\} & \{y_{2,1,-}^{-1}, y_{2,2,+}\} & \{y_{3,1,-}^{-1}, y_{3,2,-}\} \\ \{y_{4,1,-}^{-1}, y_{4,3,-}\} & \{x_{1,1,-}^{-1}, x_{1,4,-}\} & \{x_{1,2,-}^{-1}, x_{1,3,-}\} \end{matrix} \right\}$$

per i quali si ha:

$$g(\mathbf{A}_i) = 1, \quad h(\mathbf{A}_i) = 2, \quad l(\mathbf{A}_i) = 2, \quad k_H = 2 \qquad i = 2,3$$

$$g(\mathbf{A}_i) = h(\mathbf{A}_i) = 2, \quad l(\mathbf{A}_i) = 2, \quad k_H = 2 \qquad i = 4,5,6$$

corrispondenti rispettivamente ad applicazioni definite sul toro ($\mathbf{A}_2$ ed $\mathbf{A}_3$) e sulla bottiglia di Klein ($\mathbf{A}_4$, $\mathbf{A}_5$ ed $\mathbf{A}_6$).

$\beta = 3$.

Si trovano, a meno dell'azione di $\mathfrak{S}_3$, cinque 3–assemblaggi minimali, $\mathbf{A}_7$, $\mathbf{A}_8$, $\mathbf{A}_9$, $\mathbf{A}_{10}$ ed $\mathbf{A}_{11}$, corrispondenti a superficie connesse, dati dagli insiemi di coppie:

$$\mathfrak{A}_7 = \left\{ \begin{array}{cccc} \{y_{1,1,-}^{-1}, y_{1,4,+}\} & \{y_{2,1,-}^{-1}, y_{2,4,+}\} & \{y_{3,1,-}^{-1}, y_{3,3,-}\} & \{y_{4,1,-}^{-1}, y_{4,3,-}\} \\ \multicolumn{4}{c}{\{x_{1,1,-}^{-1}, x_{1,4,-}\} \quad \{x_{1,2,-}^{-1}, x_{1,5,-}\} \quad \{x_{1,3,-}^{-1}, x_{1,6,-}\}} \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{A}_8 = \left\{ \begin{array}{cccc} \{y_{1,1,-}^{-1}, y_{1,4,+}\} & \{y_{2,1,-}^{-1}, y_{2,4,+}\} & \{y_{3,1,-}^{-1}, y_{3,3,-}\} & \{y_{4,1,-}^{-1}, y_{4,3,-}\} \\ \multicolumn{4}{c}{\{x_{1,1,-}^{-1}, x_{1,6,-}\} \quad \{x_{1,2,-}^{-1}, x_{1,4,-}\} \quad \{x_{1,3,-}^{-1}, x_{1,5,-}\}} \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{A}_9 = \left\{ \begin{array}{cccc} \{y_{1,1,-}^{-1}, y_{1,4,+}\} & \{y_{2,1,-}^{-1}, y_{2,3,+}\} & \{y_{3,1,-}^{-1}, y_{3,4,-}\} & \{y_{4,1,-}^{-1}, y_{4,3,-}\} \\ \multicolumn{4}{c}{\{x_{1,1,-}^{-1}, x_{1,4,-}\} \quad \{x_{1,2,-}^{-1}, x_{1,6,-}\} \quad \{x_{1,3,-}^{-1}, x_{1,5,-}\}} \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{A}_{10} = \left\{ \begin{array}{cccc} \{y_{1,1,-}^{-1}, y_{1,4,+}\} & \{y_{2,1,-}^{-1}, y_{2,3,+}\} & \{y_{3,1,-}^{-1}, y_{3,2,-}\} & \{y_{4,1,-}^{-1}, y_{4,4,-}\} \\ \multicolumn{4}{c}{\{x_{1,1,-}^{-1}, x_{1,6,-}\} \quad \{x_{1,2,-}^{-1}, x_{1,4,-}\} \quad \{x_{1,3,-}^{-1}, x_{1,5,-}\}} \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{A}_{11} = \left\{ \begin{array}{cccc} \{y_{1,1,-}^{-1}, y_{1,4,+}\} & \{y_{2,1,-}^{-1}, y_{2,3,+}\} & \{y_{3,1,-}^{-1}, y_{3,3,-}\} & \{y_{4,1,-}^{-1}, y_{4,2,-}\} \\ \multicolumn{4}{c}{\{x_{1,1,-}^{-1}, x_{1,4,-}\} \quad \{x_{1,2,-}^{-1}, x_{1,5,-}\} \quad \{x_{1,3,-}^{-1}, x_{1,6,-}\}} \end{array} \right\}$$

per i quali si ha:

$$g(\mathbf{A}_i) = h(\mathbf{A}_i) = 1, \quad l(\mathbf{A}_i) = 2, \quad k_H = 2 \qquad i = 7, \dots, 11$$

che corrispondono tutti quanti ad applicazioni definite sul piano proiettivo.

$\beta = 4$.

Si trovano, a meno dell'azione di $\mathfrak{S}_4$ due 4–assemblaggi minimali $\mathbf{A}_{10}$ ed $\mathbf{A}_{11}$, corrispondenti a superficie connesse, dati dai seguenti insiemi di coppie:

$$\mathfrak{A}_{12} = \left\{ \begin{array}{cccc} \{y_{1,1,-}^{-1}, y_{1,5,+}\} & \{y_{2,1,-}^{-1}, y_{2,5,+}\} & \{y_{3,1,-}^{-1}, y_{3,4,-}\} & \{y_{4,1,-}^{-1}, y_{4,4,-}\} \\ \{x_{1,1,-}^{-1}, x_{1,6,-}\} & \{x_{1,2,-}^{-1}, x_{1,5,-}\} & \{x_{1,3,-}^{-1}, x_{1,8,-}\} & \{x_{1,4,-}^{-1}, x_{1,7,-}\} \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{A}_{13} = \left\{ \begin{array}{cccc} \{y_{1,1,-}^{-1}, y_{1,5,+}\} & \{y_{2,1,-}^{-1}, y_{2,4,+}\} & \{y_{3,1,-}^{-1}, y_{3,3,-}\} & \{y_{4,1,-}^{-1}, y_{4,2,-}\} \\ \{x_{1,1,-}^{-1}, x_{1,5,-}\} & \{x_{1,2,-}^{-1}, x_{1,6,-}\} & \{x_{1,3,-}^{-1}, x_{1,7,-}\} & \{x_{1,4,-}^{-1}, x_{1,8,-}\} \end{array} \right\}$$

Per tali assemblaggi risulta:

$$g(\mathbf{A}_i) = h(\mathbf{A}_i) = 0, \quad l(\mathbf{A}_i) = 2, \quad k_H = 2 \qquad i = 12, 13$$

e corrispondono entrambi ad applicazioni definite sulla sfera.

Deformazione (2). La parola deformata è data da: $w_{(D,H)} = \{y_{2,1}^{-1}\ y_{3,1}^{-1}\ y_{4,1}^{-1},\ y_{1,1}^{-1}\}$

Non si ha alcun assemblaggio minimale, in quanto la curva deformata (Fig. 52) è omotopa alla curva in Fig. 53, e quindi ha lo stesso numero di rotazione. Inoltre la parola $w_{(D,H)}$ è una parola anche per quast'ultima curva. Dato che la curva in Fig. 53 ha un occhiello positivo, si conclude usando Lemma 1.12.15.

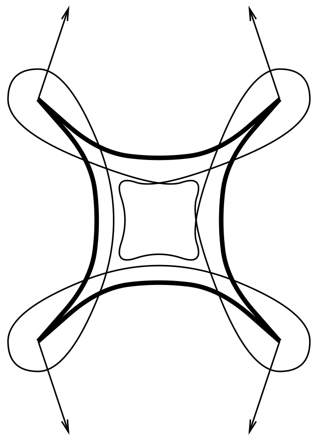


Fig. 52

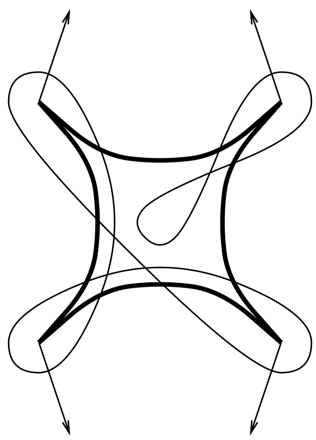


Fig. 53

Deformazioni (3), (4), (5). Per simmetria con il caso precedente si mostra che non esistono assemblaggi minimali.

Deformazione 6. La parola deformata è data da: $w_{(D,H)} = \{y_{3,1}^{-1}\ y_{4,1}^{-1},\ y_{1,1}^{-1}\ y_{2,1}^{-1}\}$.

$\beta = 1$.

Si trova un solo 1–assemblaggio, $\mathbf{A}_{14} = \big((D,H), \mathfrak{A}_{12}\big)$ con $\mathfrak{A}_{14} = \mathfrak{A}_1$. Per tale assemblaggio risulta:

$$g(\mathbf{A}_{14}) = h(\mathbf{A}_{14}) = 1, \quad l(\mathbf{A}_{14}) = 1, \quad k_H = 2,$$

quindi l'assemblaggio è minimale, e corrisponde ad una applicazione definita ancora su $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$.

$\beta = 2$.

Si trovano tre 2–assemblaggi minimali, $\mathbf{A}_{15}$, $\mathbf{A}_{16}$, $\mathbf{A}_{17}$, corrispondenti a superficie connesse, con $\mathfrak{A}_{15} = \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_{16} = \mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_{17} = \mathfrak{A}_4$, per i quali si ha:

$$g(\mathbf{A}_i) = h(\mathbf{A}_i) = 0, \quad l(\mathbf{A}_i) = 1, \quad k_H = 2, \qquad i = 15, 16$$
$$g(\mathbf{A}_{17}) = h(\mathbf{A}_{17}) = 2, \quad l(\mathbf{A}_{17}) = 2, \quad k_H = 2,$$

corrispondenti ad applicazioni definite sul toro ($\mathbf{A}_{15}$ ed $\mathbf{A}_{16}$) e sulla bottiglia di Klein ($\mathbf{A}_{17}$).

$\beta = 3$.

Si tronano due assemblaggi minimali corrispondenti a superficie connesse, $\mathbf{A}_{18}$ ed $\mathbf{A}_{19}$ con $\mathfrak{A}_{18} = \mathfrak{A}_7$ ed $\mathfrak{A}_{19} = \mathfrak{A}_8$, per i quali risulta:

$$g(\mathbf{A}_i) = h(\mathbf{A}_i) = 1, \quad l(A_i) = 2, \quad k_H = 2, \qquad i = 18, 19,$$

corrispondenti ad applicazioni definite sul piano proiettivo.

$\beta = 4$.

Si trova un solo 4–assemblaggio minimale, $\mathbf{A}_{20}$, corrispondente ad un'applicazione definita sulla sfera, il cui insieme di coppie è dato da: $\mathfrak{A}_{20} = \mathfrak{A}_{12}$, per il quale risulta:

$$g(\mathbf{A}_{20}) = h(\mathbf{A}_{20}) = 0, \quad l(\mathbf{A}_{20}) = 1, \quad k_H = 2.$$

Deformazione 7. Per simmetria con il caso precedente, si ottengono sette assemblaggi minimali $\mathbf{A}_{21}$, $\mathbf{A}_{22}$, $\mathbf{A}_{23}$, $\mathbf{A}_{24}$, $\mathbf{A}_{25}$, $\mathbf{A}_{26}$ ed $\mathbf{A}_{27}$, corrispondenti ad altrettante applicazioni generiche definite rispettivamente sulla superficie non orientabile di genere tre ($\mathbf{A}_{21}$), sul toro ($\mathbf{A}_{22}$, $\mathbf{A}_{23}$), sulla bottiglia di Klein ($\mathbf{A}_{24}$) sul piano proiettivo ($\mathbf{A}_{25}$, $\mathbf{A}_{26}$) e sulla sfera ($\mathbf{A}_{27}$).

Deformazione 8. La parola deformata è data da: $w_{(D,H)} = \{y_{2,1}^{-1}\ y_{4,1}^{-1},\ y_{1,1}^{-1}\ y_{3,1}^{-1}\}$.

$\beta = 1$.

Per l'unico 1–assemblaggio si ha:

$$g(\mathbf{A}) = 3, \quad h(\mathbf{A}) = 6, \quad l(\mathbf{A}) = 1, \quad k_H = 2,$$

quindi l'assemblaggio non è minimale.

$\beta = 2$

Si trovano due 2–assemblaggi minimali $\mathbf{A}_{28}$ ed $\mathbf{A}_{29}$ con:

$$\mathfrak{A}_{28} = \left\{ \begin{array}{ccc} \{y_{1,1,-}^{-1}, y_{1,3,+}\} & \{y_{2,1,-}^{-1}, y_{2,2,+}\} & \{y_{3,1,-}^{-1}, y_{3,2,-}\} \\ \{y_{4,1,-}^{-1}, y_{4,3,-}\} & \{x_{1,1,-}^{-1}, x_{1,3,-}\} & \{x_{1,2,-}^{-1}, x_{1,4,-}\} \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{A}_{29} = \left\{ \begin{array}{ccc} \{y_{1,1,-}^{-1}, y_{1,3,+}\} & \{y_{2,1,-}^{-1}, y_{2,2,+}\} & \{y_{3,1,-}^{-1}, y_{3,3,-}\} \\ \{y_{4,1,-}^{-1}, y_{4,2,-}\} & \{x_{1,1,-}^{-1}, x_{1,4,-}\} & \{x_{1,2,-}^{-1}, x_{1,3,-}\} \end{array} \right\}$$

per i quali si ha:

$$g(\mathbf{A}_{28}) = h(\mathbf{A}_{28}) = 0, \quad l(\mathbf{A}_{28}) = 1, \quad k_H = 2,$$
$$g(\mathbf{A}_{29}) = h(\mathbf{A}_{29}) = 2, \quad l(\mathbf{A}_{29}) = 2, \quad k_H = 2,$$

corrispondenti ad applicazione definite rispettivamente sul toro e sulla bottiglia di Klein.

$\beta = 3$

Si trovano due assemblaggi minimali, $\mathbf{A}_{30}$ ed $\mathbf{A}_{31}$, con insiemi di coppie dati da:

$$\mathfrak{A}_{30} = \left\{ \begin{array}{c} \{y^{-1}_{1,1,-}, y_{1,4,+}\} \quad \{y^{-1}_{2,1,-}, y_{2,3,+}\} \quad \{y^{-1}_{3,1,-}, y_{3,2,-}\} \quad \{y^{-1}_{4,1,-}, y_{4,3,-}\} \\ \{x^{-1}_{1,1,-}, x_{1,4,-}\} \quad \{x^{-1}_{1,2,-}, x_{1,5,-}\} \quad \{x^{-1}_{1,3,-}, x_{1,6,-}\} \end{array} \right\}$$
$$\mathfrak{A}_{31} = \left\{ \begin{array}{c} \{y^{-1}_{1,1,-}, y_{1,4,+}\} \quad \{y^{-1}_{2,1,-}, y_{2,3,+}\} \quad \{y^{-1}_{3,1,-}, y_{3,4,-}\} \quad \{y^{-1}_{4,1,-}, y_{4,2,-}\} \\ \{x^{-1}_{1,1,-}, x_{1,6,-}\} \quad \{x^{-1}_{1,2,-}, x_{1,4,-}\} \quad \{x^{-1}_{1,3,-}, x_{1,5,-}\} \end{array} \right\}$$

per i quali risulta:

$$g(\mathbf{A}_i) = h(\mathbf{A}_i) = 1, \quad l(\mathbf{A}_i) = 2, \quad k_H = 2, \qquad i = 30, 31$$

e che corrispondono ad applicazioni definite sul piano proiettivo.

$\beta = 4$

Si trova un solo 4–assemblaggio minimale corrispondente alla sfera, $\mathbf{A}_{32}$, con insieme delle coppie:

$$\mathfrak{A}_{32} = \left\{ \begin{array}{c} \{y^{-1}_{1,1,-}, y_{1,5,+}\} \quad \{y^{-1}_{2,1,-}, y_{2,4,+}\} \quad \{y^{-1}_{3,1,-}, y_{3,3,-}\} \quad \{y^{-1}_{4,1,-}, y_{4,2,-}\} \\ \{x^{-1}_{1,1,-}, x_{1,6,-}\} \quad \{x^{-1}_{1,2,-}, x_{1,5,-}\} \quad \{x^{-1}_{1,3,-}, x_{1,8,-}\} \quad \{x^{-1}_{1,4,-}, x_{1,7,-}\} \end{array} \right\}$$

per il quale si ha:

$$g(\mathbf{A}_{22}) = h(\mathbf{A}_{22}) = 0, \quad l(\mathbf{A}_{22}) = 2, \quad k_H = 2.$$

Partizione (b). Non esitono assemblaggi minimali.

In definitiva si sono trovate esattamente 32 applicazioni non equivalenti, definite su una superficie connessa e che hanno la curva Γ come contorno apparente. Per quanto riguarda la fattorizzabilità di tali applicazioni, evidentemente, per il Teorema 3.1.1 (vedi anche Proposizione 3.2.1) si ha che tutte sono fattorizzabili mediante immersioni sia in $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{R}$, sia in $\mathbb{RP}^3$. Per quanto riguarda invece la fattorizzabilità mediante embedding, la situazione è più articolata, ed usando il Teorema 3.5.12, ricordandosi che il fibrato banale è dato dal peso 1 su ω_1 ed il fibrato tautologico ($\mathbb{RP}^3 - \{p\}$ cfr. §3.2) dal peso -1, si trovano i risultati riassunti nella seguente tabella:

β	*Dominio*	$\hookrightarrow \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{R}$	$\hookrightarrow \mathbb{RP}^3$	*Non fatt.*
1	$\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_{14}$, $\mathbf{A}_{21}$
2	$\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$	$\mathbf{A}_{17}$, $\mathbf{A}_{24}$	$\star \quad \star \quad \star$	$\mathbf{A}_4$, $\mathbf{A}_5$, $\mathbf{A}_6$, $\mathbf{A}_{29}$
3	$\mathbb{RP}^2$	$\star \quad \star \quad \star$	$\mathbf{A}_{18}$, $\mathbf{A}_{19}$, $\mathbf{A}_{25}$, $\mathbf{A}_{26}$	$\mathbf{A}_7$, $\mathbf{A}_8$, $\mathbf{A}_9$, $\mathbf{A}_{10}$ $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{30}$, $\mathbf{A}_{31}$
2	$\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$	$\star \quad \star \quad \star$	$\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_{15}$, $\mathbf{A}_{22}$	$\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_{16}$, $\mathbf{A}_{23}$, $\mathbf{A}_{28}$
4	$\mathbf{S}^2$	$\star \quad \star \quad \star$	$\mathbf{A}_{20}$, $\mathbf{A}_{27}$,	$\mathbf{A}_{12}$, $\mathbf{A}_{13}$, $\mathbf{A}_{32}$

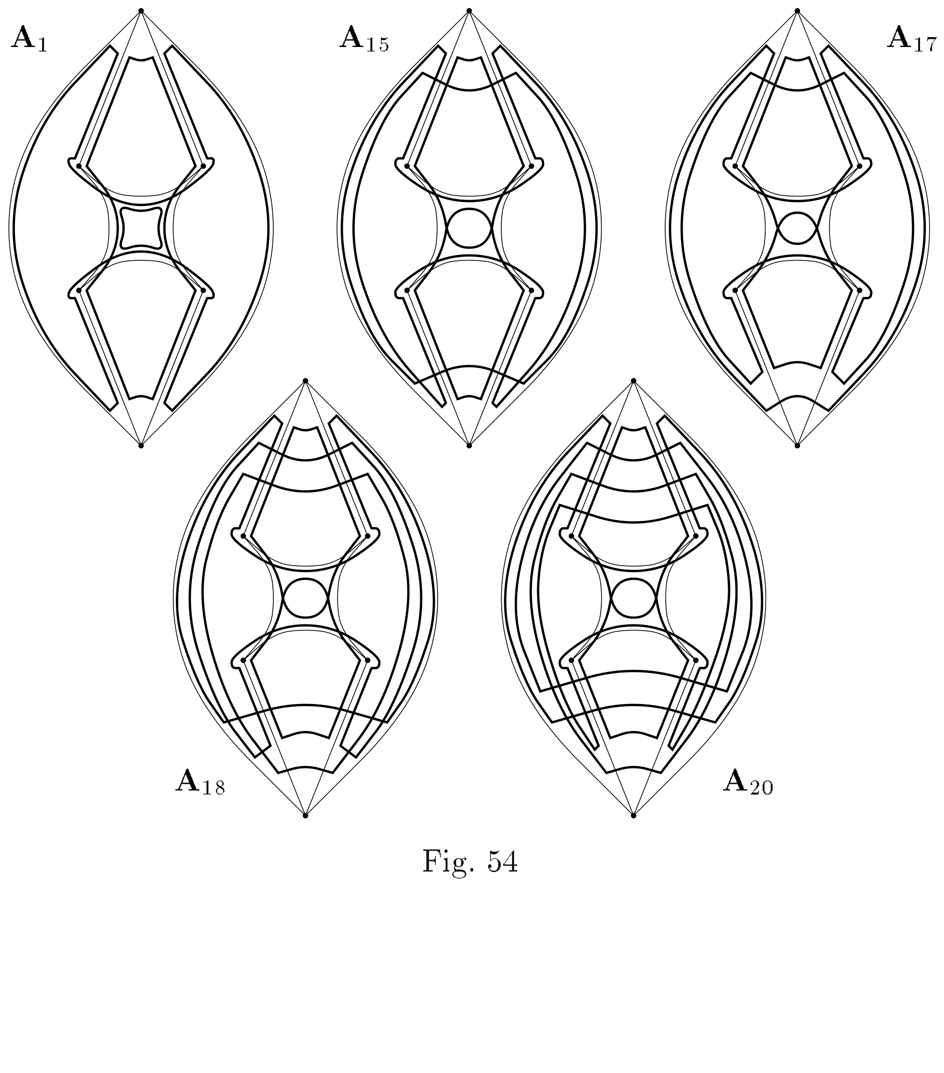


Fig. 54

In Fig. 54 sono schematizzate le applicazioni corrispondenti ad alcuni degli assemblaggi elencati nella tabella. Ciascuna delle curve chiuse, semplici (tratto forte) rappresenta il bordo dell'immagine di ciascuna componente di $S - G(F)$.

La fattorizzazione dell'applicazione definita da $\mathbf{A}_1$, sia in $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{R}$ che in $\mathbb{RP}^3$, è ottenuta attaccando un manico alla sezione nulla del fibrato stesso, nel modo suggerito in Fig. 55, ed in modo del tutto analogo la fattorizzazione di $\mathbf{A}_3$ in $\mathbb{RP}^3$ è ottenuta attaccando un manico ad una sfera attorno al punto di vista (punto da cui si proietta), che costituisce il rivestimento universale di $\mathbb{RP}^2$. Le fattorizzazioni di $\mathbf{A}_{17}$ ed $\mathbf{A}_{24}$ in $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{R}$, sono invece costruite attaccando un tubo tra due copie di $\mathbb{RP}^2$, ottenute come sezioni disgiunte del fibrato, nel modo suggerito da Fig. 56. In modo analogo, si ottengono anche le altre fattorizzazioni: quelle di $\mathbf{A}_{15}$ ed $\mathbf{A}_{22}$, sono ottenute attaccando un tubo tra le due falde del rivestimento universale, quelle di $\mathbf{A}_{18}$, $\mathbf{A}_{19}$, $\mathbf{A}_{25}$ ed $\mathbf{A}_{26}$ sono ottenute attaccando un tubo tra la sezione nulla del fibrato ed una falda del rivestimento universale ed infine, quelle di $\mathbf{A}_{20}$ ed $\mathbf{A}_{27}$ sono ottenute attaccando un tubo tra due sfere concentriche attorno al punto di vista.

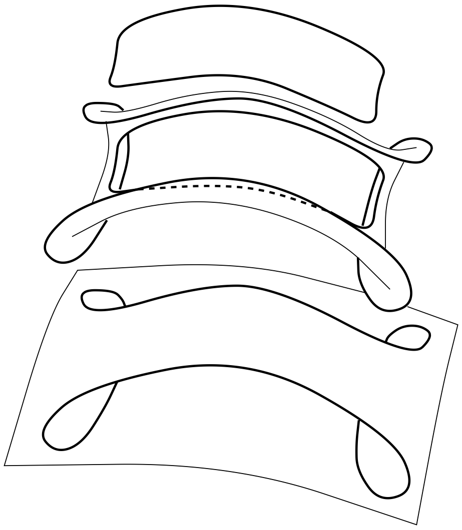


Fig. 55

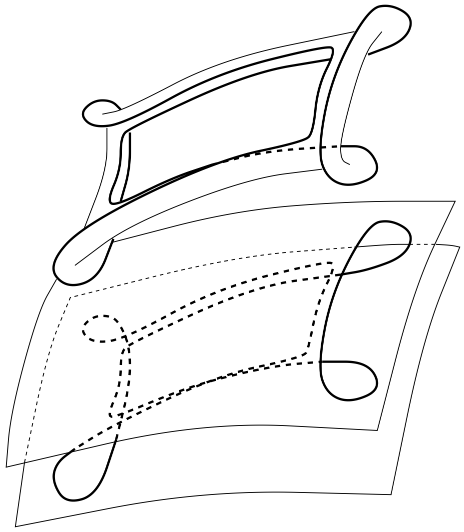


Fig. 56

Bibliografia

[B] D. Bennequin, *Caustique mistique*, Exposition 634, Séminaire Bourbaki **37** (1984/85).

[Bl] S. J. Blank, *Extending immersions of the circle*, "Dissertation", Brandeis University, Waltam, Mass., 1967.

[B–L] T. Bröcker, L. Lander, "Differentiable germs and catastrophes", London Mathemathical Society Lectures Notes Series n. 17, Cambridge University Press, Cambridge G. B., 1975.

[C] V. L. Carrara Zanetic, *Extensions of immersions in dimension two*, Trabalhos do Departamento de Matemática **92** (1986). Universidade de São Paulo, Instituto de Matemática e Estatitistica, São Paulo.

[C–W] C. Curley, D. Wolitzer, *Branched immersions of surfaces*, Michigan Math. Jour. **33** (1986), 131–144.

[E] Ja. M. Èliašberg, *On singularities of folding type*, Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R. **34** (1970), 1110–1126; (Math. U.R.S.S.–Izvestija **4** (1970), 1119–1134).

[Ez] C. L. Ezell, *Branched extensions of curves in compact manifold*, Trans. of the A. M. S. **259** (1980), 533–546.

[**E–M**] C. L. Ezell, M. L. Marx, *Branched extensions of curves in oriented surfaces*, Trans. of the A. M. S. **259** (1980), 515–532.

[**F1**] G. K. Francis, *Assembling compact riemann surfaces with given boundary curves and branch points on the sphere*, Ill. Jour. of Math. **20** (1976), 198–217.

[**F2**] G. K. Francis, *Polymersions whith nontrivial target*, Ill. Jour. of Math. **22** (1978), 161–170.

[**F–T1**] G. K. Francis, S. F. Troyer, *Excellent Maps with Given Folds and Cusps*, Houston Jour. of Math. **3** (1977), 165–194.

[**F–T2**] G. K. Francis, S. F. Troyer, *Continuation: Excellent Maps with Given Folds and Cusps*, Houston Jour. of Math. **8** (1982), 53–59.

[**G–T**] R. Z. Goldstein, E. C. Turner, *Extending immersions of the circle*, Preprint, State University of New York at Albany, Department of Mathematics.

[**H**] A. Haefliger, *Quelques remarques sur les applications differentiables d'une surface dans le plan*, Ann. Inst. Fourier **10** (1960), 47–60.

[**Hi**] M. W. Hirsh, "Differential Topology", Graduate texts in mathematics n. 88, Springer–Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1988.

[**L**] D. Luminati, *Factorizations of generic mappings between surfaces*, Preprint, Dipartimento di Matematica, Università di Pisa (1991).

[**M**] M. L. Marx, *Extensions of normal immersions of* $\mathbf{S}^1$ *into* $\mathbb{R}^2$, Trans. Amer. Math. Soc. **187** (1974), 309–326.

[**Ma1**] W. S. Massey, "Algebraic Topology: an introduction", Graduate texts in mathematics 56, Springer–Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1977.

[**Ma2**] W. S. Massey, "Singular Homology Theory", Graduate texts in mathematics 70, Springer–Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1980.

[**Mi**] K. C. Millet, *Generic smooth maps of surfaces*, Top. and its Appl. **18** (1984), 197–215.

[Mil] J. W. Milnor, "Topology from the differentiable viewpoint", University Press of Virginia, Charlottesville U.S.A., 1965.

[Pi1] R. Pignoni, *Curves and Surfaces in Real Projective Space: an Aproach to Generic Projections*, Singularities, Banach Center Publication **20** (1988), 335–351.

[Pi2] R. Pignoni, *Projections of Surfaces with a Connected Fold Curve*, Preprint, Università di Milano (1990).

[Pi3] R. Pignoni, *On surfaces and they contours*, Manuscripta Math. **72** (1991), 223–249.

[Po] V. Poenaru, *Extension des immersions en codimension 1 (d'aprés Samuel Blank)*, Exposition 342, Séminaire Bourbaki **20** (1967/68).

[Q] J. R. Quine, *A global theorem for singularities of maps between oriented 2–manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **236** (1978), 307–314.

[S] N. Steenrod, "The Topology of Fibre Boundles", Princeton mathematical series 14, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1951.

[T] R. Thom, *Les Singularités des Application Diffèrentiables*, Ann. Inst. Fourier **6** (1955–1956), 43–87.

[W] H. Whitney, *On singularities of mappings of Euclidean space.I*, Ann. of Math. **62** (1955), 374–410.

[Z] E. C. Zeeman, *A catastrophe machine*, in "Towards e Theoretical Biology 4", C. H. Waddington ed., Aldine–Atherton, Chicago, 1972.