Angoli

Pino Vigna Suria

11 marzo 2010

1 La funzione esponenziale

Per comprendere questa nota il lettore deve conoscere le proprietà elementari dei numeri complessi, delle serie di potenze e delle funzioni di una variabile reale ed il concetto di omomorfismo di gruppi.

Definizione 1. *La* funzione esponenziale $exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *è definita mediante*

$$exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

Si tratta dunque di una funzione analitica e, applicando il criterio del rapporto, si controlla facilmente che è effettivamente definita su tutto $\mathbb{C}$. Inoltre la sua restrizione a $\mathbb{R}$ è la familiare funzione esponenziale che si studia nei primi corsi di analisi matematica, in particolare è un isomorfismo tra il gruppo additivo $\mathbb{R}$ ed il gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}^+$ dei numeri reali strettamente positivi.

Inoltre essa gode delle seguenti proprietà:

Proposizione 1. *Per ogni* $z, w \in \mathbb{C}, x, y \in \mathbb{R}$

1. $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$.
2. $e^{z+w} = e^z e^w$.
3. $|e^{x+iy}| = e^x$
4. $e^{iy} \in S^1 = \{z \in \mathbb{C} \textit{ tali che } |z| = 1\}$.

Dimostrazione. 1. Ovvio.

2. Si usa la formula del binomio di Newton.

$$e^z e^w = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n)(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} w^m) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} z^p \frac{1}{(n-p)!} w^{n-p} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = e^{z+w}.$$

3. Usando 1 e 2, si ottiene $(e^x)^2 = e^{2x} = e^{x+iy+x-iy} = e^{x+iy}\overline{e^{x+iy}}$.

4. Segue da 3 e dal fatto che $e^0 = 1$.

□

In particolare abbiamo scoperto che la funzione $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ data da $\phi(y) = e^{iy}$ è un omomorfismo di gruppi; è nostra intenzione provare che è suriettivo e scoprire com'è fatto il suo nucleo.

A questo scopo definiamo due funzioni

$$c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mediante

$$c(y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} y^{2n}$$

$$s(y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} y^{2n+1}.$$

Si tratta di due serie di potenze, ma non è immediato il calcolo del loro raggio di convergenza: preoccupiamocene.

Consideriamo la funzione analitica $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} t^n$. Il criterio del rapporto ci dice che questa serie di potenze ha raggio di convergenza infinito: componendo

$$y \rightarrow (y, y^2) \rightarrow (y, \psi(y^2)) \rightarrow y\psi(y^2)$$

si trova precisamente $s(y)$ per cui s ha raggio di convergenza infinito. In modo leggermente più facile si vede che anche la funzione c è ovunque definita su $\mathbb{R}$.

Proposizione 2. *Le funzioni appena definite godono delle seguenti proprietà:*

1. *Per ogni* $y \in \mathbb{R} \quad e^{iy} = c(y) + is(y)$; *in particolare* $c(y)^2 + s(y)^2 = 1$.
2. $c(0) = 1$, $s(0) = 0$.
3. *Per ogni* $y \in \mathbb{R} \quad s'(y) = c(y), \quad c'(y) = -s(y)$.

Dimostrazione. Ovvia. □

Essendo in particolare c una funzione continua, il teorema della permanenza del segno, insieme con 2, ci assicura che esiste $y_0 > 0$ tale che c è strettamente positiva sull'intervallo chiuso $[0, y_0]$. Poniamo

$$U = \{t \in \mathbb{R}^+ \text{ tali che } c(y) > 0 \; \forall y \in [0, t]\}.$$

Abbiamo appena visto che U non è vuoto, inoltre ogni numero positivo minore di un elemento di U vi appartiene a sua volta; 3 dice che s è strettamente crescente su $[0, t], \forall t \in U$. In particolare, usando 2 si ottiene che $a = s(y_0) > 0$. Proviamo che U è superiormente limitato, cioè, alla luce delle ovvie osservazioni appena riportate, verifichiamo che esiste qualche numero positivo che non sta in U. Se, per assurdo, ogni $y_1 > y_0$ appartiene a U allora s è crescente nell'intervallo $[y_0, y_1]$ ed il teorema fondamentale del calcolo ci dice

$$c(y_1) = c(y_0) + \int_{y_0}^{y_1} c'(t)dt = c(y_0) - \int_{y_0}^{y_1} s(t)dt$$
$$< c(y_0) - \int_{y_0}^{y_1} a dt = c(y_0) - a(y_1 - y_0)$$

e quest'ultimo numero diventa ovviamente negativo per y_1 abbastanza grande.

Poniamo $\frac{\pi}{2} = \sup U$ (questa è la più semplice delle definizioni rigorose del numero π). È facile vedere che $c(\frac{\pi}{2}) = 0$ e ovviamente $U =]0, \frac{\pi}{2}[$, in particolare s è positiva su tale intervallo e dunque c è iniettiva su $[0, \frac{\pi}{2}]$ (per la precisione strettamente decrescente). Per il teorema del valore intermedio c è un omeomorfismo tra $[0, \frac{\pi}{2}]$ e $[0, 1]$, da cui segue immediatamente che ϕ stabilisce una biezione continua tra $[0, \frac{\pi}{2}]$ e $\{z \in S^1 \text{ tali che } Re(z) \geq 0,\, Im(z) \geq 0\}$.

Se $y \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ allora $\phi(y) = \phi((y - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}) = i\phi(y - \frac{\pi}{2})$ e dunque ϕ stabilisce una corrispondenza biunivoca e continua tra $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ e $\{z \in S^1 \text{ tali che } Re(z) \leq 0,\, Im(z) \geq 0\}$.

Analogamente se $y \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ allora $\phi(y) = \phi((y-\pi)+\pi) = -\phi(y-\pi)$ e ϕ stabilisce una corrispondenza biunivoca e continua tra $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ e $\{z \in S^1$ tali che $Re(z) \leq 0$, $Im(z) \leq 0\}$.

Infine se $y \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ allora $\phi(y) = \phi(2\pi - (2\pi - y)) = \phi(2\pi - y)^{-1}$ e ϕ stabilisce una corrispondenza biunivoca e continua tra $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ e $\{z \in S^1$ tali che $Re(z) \geq 0$, $Im(z) \leq 0\}$.

In conclusione ϕ è una funzione suriettiva e continua tra $\mathbb{R}$ e S^1 il cui nucleo è $2\pi\mathbb{Z}$.

Le due funzioni c, s sono dette le *funzioni trigonometriche*, sono chiamate rispettivamente *coseno* e *seno* e sono indicate con i simboli $\cos$ e $\sin$. Dal fatto che ϕ è un omomorfismo di gruppi si evincono immediatamente le cosiddette *formule di addizione* e da esse tutte le altre formule trigonometriche note dalle scuole superiori. Ma, adesso, con rigore.

Corollario 1. *La funzione esponenziale è un omomorfismo suriettivo e continuo tra il gruppo additivo $\mathbb{C}$ ed il gruppo moltiplicativo $\mathbb{C}^*$ il cui nucleo è $2\pi i\mathbb{Z}$.*

Dimostrazione. Se, per assurdo $e^z = 0$ allora $1 = e^0 = e^{(z-z)} = e^z e^{-z} = 0e^{-z}$, impossibile. Sia poi $0 \neq w \in \mathbb{C}$ e sia $x \in \mathbb{R}$ tale che $e^x = |w|$. Siccome $\frac{w}{|w|} \in S^1$ esiste $y \in \mathbb{R}$ tale che $e^{iy} = \frac{w}{|w|}$; allora $e^{x+iy} = w$.

Se $1 = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ allora $e^x = 1$, da cui segue che $x = 0$ e $y \in \mathrm{Ker}(\phi)$. $\square$

2 I gruppi ortogonali

Indichiamo con il simbolo $GL(n)$ il gruppo delle matrici quadrate invertibili di ordine n a coefficienti reali munito dell'operazione di prodotto di matrici.

Se V è uno spazio vettoriale reale di dimensione n indichiamo con $GL(V)$ il gruppo delgli operatori invertibili su V munito dell'operazione di composizione di funzioni. Se $\mathcal{B}$ è una base di V allora la funzione

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} : GL(V) \longrightarrow GL(n)$$

è un isomorfismo di gruppi.

$O(n) = \{A \in GL(n)$ tali che $A^t A = I\}$ è un sottogruppo di $GL(n)$ detto *gruppo ortogonale* di ordine n. Se $A \in O(n)$ allora

$$1 = \det(I) = \det(A^t A) = \det(A)^2$$

e quindi $\det(A) = \pm 1$. La funzione $\det : O(n) \longrightarrow \{1, -1\}$ è un omomorfismo suriettivo di gruppi. Il suo nucleo viene indicato con $O^+(n)$ ed il suo complementare con $O^-(n)$.

Sia E uno spazio euclideo reale di dimensione n, e denotiamo con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il suo prodotto scalare. Il *gruppo ortogonale* di E è il sottogruppo di $GL(E)$ dato da

$$O(E) = \{T \in GL(E) \text{ tali che } \langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in E\}$$

Le verifiche necessarie per controllare l'appartenenza a $O(E)$ possono essere ridotte a n^2 usando il seguente

Lemma 1. *Siano $\mathcal{B}$ una base di E e $T \in \mathrm{Hom}(E, E)$ allora*

$$T \in O(E) \Leftrightarrow \langle T(b_i), T(b_j) \rangle = \langle b_i, b_j \rangle \quad \forall i, j = 1 \dots n.$$

Dimostrazione. Esercizio. $\square$

E si può controllare l'appartenenza a $O(E)$ in termini di matrici come segue

Proposizione 3. *Siano $\mathcal{B}$ una base di E, $T \in \mathrm{Hom}(E, E)$, $S = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ e $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T)$; allora*

$$T \in O(E) \Leftrightarrow S = A^t S A.$$

Dimostrazione. Alla luce del lemma precedente $T \in O(E) \Leftrightarrow \quad \forall i, j = 1, \dots n$

$$s_{ij} = \langle b_i, b_j \rangle = \langle T(b_i), T(b_j) \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_k, \sum_{h=1}^{n} a_{hj} b_h \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} (sa)_{kj} = (a^t sa)_{ij}.$$

$\square$

In particolare se la base scelta è ortonormale $S = I$ e quindi la proposizione appena dimostrata ci fornisce il seguente

Teorema 1. *Se $\mathcal{B}$ è una base ortonormale di E allora*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} : O(E) \longrightarrow O(n)$$

è un isomorfismo di gruppi.

Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n e $T \in \mathrm{Hom}(V, V)$ possiamo definire il suo determinante: basta prendere, a piacere, una base $\mathcal{B}$ di V e porre $\det(T) = \det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T))$. Si deve verificare che la scelta della base non influenza il risultato finale, e questo segue facilmente dal fatto che, se A e B sono matrici che rappresentano lo stesso operatore rispetto a basi diverse, allora esiste una matrice invertibile P tale che $B = P^{-1}AP$. La formula di Binet ci dice subito che $\det(A) = \det(B)$.

Ma esiste anche un altro numero che può essere convenientemente associato prima a una matrice quadrata e poi ad un operatore: se $A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$ la sua *traccia* è il numero reale $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, cioé la somma degli elementi della diagonale principale di A. Un calcolo diretto mostra che $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, in particolare $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(APP^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$. Possiamo dunque definire la traccia di un operatore T su V scegliendo a nostro agio una base $\mathcal{B}$ di V e ponendo $\mathrm{tr}(T) = \mathrm{tr}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T))$.

Definiamo allora, per uno spazio euclideo E il sottogruppo

$$O^{+}(E) = \{T \in O(E) \text{ tali che } \det(T) > 0\}$$

il cui complementare in $O(E)$ è ovviamente l'insieme

$$O^{-}(E) = \{T \in O(E) \text{ tali che } \det(T) < 0\}.$$

Se $\mathcal{B}$ è una base ortonormale di E l'isomorfismo $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} : O(E) \longrightarrow O(n)$, opportunamente ristretto, ci fornisce un isomorfismo tra $O^{+}(E)$ e $O^{+}(n)$ ed una corrispondenza biunivoca tra $O^{-}(E)$ e $O^{-}(n)$.

Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita, sull' insieme costituito da tutte la basi di V possiamo definire una relazione d'equivalenza, ponendo

$$\mathcal{B}\rho\mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)) > 0.$$

Si vede molto facilmente che l'insieme quoziente così ottenuto ha esattamente due classi, ognuna di esse viene chiamata *orientazione* su V. Due basi equivalenti si dicono *concordi*, se non lo sono si dicono *discordi*.

Definizione 2. *Uno* spazio vettoriale orientato *è una coppia ordinata* (V, α) *dove* V *è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e* α *è un'orientazione su* V. *Una base* $\mathcal{B}$ *di* V *viene detta* positiva *se* $\mathcal{B} \in \alpha$ *altrimenti è* negativa.

3 Applicazioni al piano

In questa sezione sarà sempre $n = 2$.

Proposizione 4. *Siano u, v vettori unitari in un piano euclideo E*

1. *Esiste un'unica $T \in O^+(E)$ tale che $T(u) = v$.*
2. *Esiste un'unica $S \in O^-(E)$ tale che $S(u) = v$.*

Dimostrazione. $\mathbb{R}u^\perp$ e $\mathbb{R}v^\perp$ sono rette in E. Scegliamo a piacere due vettori unitari $u_1 \in \mathbb{R}u^\perp$ e $v_1 \in \mathbb{R}v^\perp$. Se le basi ortonormali (u, u_1) e (v, v_1) sono concordi definiamo T mediante $T(u) = v$, $T(u_1) = v_1$ e S mediante $S(u) = v$, $S(u_1) = -v_1$; se sono discordi definiamo T mediante $T(u) = v$, $T(u_1) = -v_1$ e S mediante $S(u) = v$, $S(u_1) = v_1$. Queste applicazioni lineari stanno effettivamente in $O(E)$ per il lemma 1. È facile vedere che esse soddisfano quanto richiesto. L'unicità è ovvia. $\square$

Teorema 2. 1. *$O^+(2) = \{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ tali che $a^2 + b^2 = 1\}$.*

2. *$O^-(2) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ tali che $a^2 + b^2 = 1\}$, in particolare ogni $A \in O^-(2)$ soddisfa $A^2 = I$.*

Dimostrazione. Sia $\begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix} \in O(2)$ allora

$$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ax + by \\ ax + by & x^2 + y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per cui $a^2+b^2 = 1$ e $(a, b) \neq (0, 0)$ in particolare lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione omogenea $ax + by = 0$ ha dimensione 1, ed il vettore non nullo $(-b, a)$ ci appartiene; dunque esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $(x, y) = k(-b, a)$. Ogni elemento di $O(2)$ è dunque della forma $\begin{pmatrix} a & -kb \\ b & ka \end{pmatrix}$, con $a^2 + b^2 = 1$; ma il determinante di questa matrice è $k(a^2 + b^2) = k$, per cui $k = \pm 1$. Questo prova una delle due inclusioni in entrambe le affermazioni, le altre sono ovvie. $\square$

Corollario 2. *La funzione che manda* $S^1 \ni a+ib$ *in* $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ *è un isomorfismo tra* S^1 *e* $O^+(2)$. *La sua inversa è indicata con* ψ. *In particolare* $O^+(2)$ *è un gruppo abeliano.*

Corollario 3. *Sia* E *è un piano euclideo.*

1. *Se* $S, T \in O^+(E), \quad S \circ T = T \circ S$.
2. *Se* $S \in O^-(E), \quad S \circ S = \mathrm{id}_E$.
3. *Se* $S \in O^-(E), T \in O^+(E), \quad T \circ S = S \circ T^{-1}$.
4. *Se* $S \in O^-(E), T \in O^-(E), \quad S \circ T \in O^+(E)$.

Dimostrazione. 1. $O^+(E)$ è isomorfo a $O^+(2)$ che è abeliano.

2. Segue dai punto 2 del teorema 2.

3. $T \circ S \in O^-(E)$ ma allora per il punto 2

$$T \circ S = (T \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ T^{-1} = S \circ T^{-1}.$$

4. Ovvio.

□

Abbiamo visto in precedenza che, per trovare esplicitamente l'isomorfismo menzionato nell'ultima dimostrazione dobbiamo scegliere una base ortonormale $\mathcal{B}$ di E. Se $T \in O^+(E)$ allora

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

D'altra parte $2a = \mathrm{tr}(T)$ e dunque a non dipende dalla base ortonormale scelta, e anche $|b|$ non ne dipende in quanto $a^2 + b^2 = 1$, ma si può fare di meglio:

Proposizione 5. *Siano* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$ *basi ortonormali di* E *e sia* $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$; *allora*

- *Se* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$ *sono concordi* $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(T) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

- *Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono discordi* $\mathcal{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(T) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Dimostrazione. Sia $S \in \mathrm{Hom}(E, E)$ l'applicazione lineare data da $S(b_i) = c_i \quad i = 1, 2$. Per il lemma $S \in O(E)$, inoltre $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(S) = \mathcal{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = P$. In ogni caso

$$\mathcal{M}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(T) = P^{-1}\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(T)P = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(S^{-1} \circ T \circ S)$$

Se le basi sono concordi $S \in O^+(E)$ e quindi commuta con T, per cui

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(S^{-1} \circ T \circ S) = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(T),$$

e la prima affermazione è provata.

Se invece sono discordi allora $S \in O^-(E)$ ed il punto 3 del corollario 3 ci assicura che $T \circ S = S \circ T^{-1}$. Si prova la seconda affermazione osservando che

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(S^{-1} \circ T \circ S) = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(S^{-1} \circ S \circ T^{-1}) = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(T)^{-1}.$$

□

Se (E, α) è uno spazio euclideo orientato chiameremo *canonico* l'isomorfismo di gruppi $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} : O^+(E) \longrightarrow O^+(2)$, dove $\mathcal{B} \in \alpha$. Chiameremo anche *isomorfismo canonico* l'isomorfismo $\theta = \theta_\alpha : O^+(E) \longrightarrow S^1$ che si ottiene componendo ψ con $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$. Se β è l'altra orientazione di E evidentemente $\overline{\theta_\alpha(T)} = \theta_\beta(T), \quad \forall T \in O^+(E)$, dove la sopralineatura indica la coniugazione in $\mathbb{C}$.

Se $T \in O^+(E)$ chiameremo $\alpha-$ *misura* o, se non c'è pericolo di confusione, semplicemente *misura* di T qualunque numero reale t tale che $e^{it} = \theta_\alpha(T)$. Ovviamente $t, s \in \mathbb{R}$ sono misure di $T \in O^+(E)$ se e solo se $t - s \in 2\pi\mathbb{Z}$. Inoltre, se t è un'α-misura di T allora $-t$ è una β-misura di T. La $\alpha-$ misura *principale* di $T \in O^+(E)$ è l'unica sua misura che sta nell'intervallo $[0, 2\pi[$.

In estrema sintesi dire che $t \in \mathbb{R}$ è un'α-misura di T significa che

$$\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

per una, e dunque per ogni, $\mathcal{B} \in \alpha$.

4 Angoli

Anche in questa sezione E è uno spazio euclideo di dimensione 2. Un sottoinsieme di E viene detto *semiretta* di E se è del tipo $\mathbb{R}^+v$ dove $0 \neq v \in E$. Si dice che $0 \neq v$ è un *generatore* della semiretta $\mathbb{R}^+v$; ovviamente ogni elemento di una semiretta Δ è un suo generatore. Inoltre, se $T \in GL(E)$ e Δ è una semiretta (generata da v) anche $T(\Delta)$ è una semiretta (generata da $T(v)$). Indichiamo con $\mathcal{S}(E)$ l'insieme di tutte le semirette di E.

Se $\Delta, \Delta' \in \mathcal{S}(E)$ il numero $\dfrac{\langle v, v'\rangle}{|v||v'|}$ non dipende dalla scelta di $v \in \Delta$ e di $v' \in \Delta'$. Inoltre, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, esso appartiene all'intervallo $[-1, 1]$. Sfruttando il fatto che $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ è una corrispondenza biunivoca possiamo dare la seguente

Definizione 3. *Siano $\Delta = \mathbb{R}^+v, \Delta' = \mathbb{R}^+v' \in \mathcal{S}(E)$, l'*angolo *tra Δ e Δ' è l'unico numero reale $t \in [0, \pi]$ tale che $\cos t = \dfrac{\langle v, v'\rangle}{|v||v'|}$. Tale numero non dipende che da Δ e da Δ' e viene indicato con il simbolo $\overline{\Delta\Delta'}$.*

Ben poco c'è da commentare su questo semplice concetto: evidentemente $\forall \Delta, \Delta' \in \mathcal{S}(E)$ $\overline{\Delta\Delta'} = \overline{\Delta'\Delta}$, $\overline{\Delta\Delta'} = 0 \Leftrightarrow \Delta = \Delta', \overline{\Delta\Delta'} = \pi \Leftrightarrow \Delta = -\Delta'$, $\overline{\Delta\Delta'} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \Delta$ e Δ' sono ortogonali, con ovvio significato di quest'ultimo concetto.

È anche facile vedere che,

$$\forall \Delta, \Delta' \in \mathcal{S}(E), \quad \forall T \in O(E) \quad \overline{T(\Delta)T(\Delta')} = \overline{\Delta\Delta'}.$$

Quest'ultima osservazione ha un'inversa: se $\Delta, \Delta', \Delta_1, \Delta'_1 \in \mathcal{S}(E)$ soddisfano $\overline{\Delta\Delta'} = \overline{\Delta_1\Delta'_1}$ allora esiste $T \in O(E)$ tale che $\Delta_1 = T(\Delta)$ e $\Delta'_1 = T(\Delta')$. Prendiamo infatti i quattro vettori unitari $u \in \Delta$, $u' \in \Delta'$, $u_1 \in \Delta_1$ e $u'_1 \in \Delta'_1$ e scegliamo a nostro agio v, v_1 in modo che (u, v), (u_1, v_1) siano basi ortonormali di E. Scriviamo, in modo unico, $u' = xu + yv$, $\quad u'_1 = x_1u_1 + y_1v_1$. Allora $x = \langle u, u'\rangle$ e $x_1 = \langle u_1, u'_1\rangle$ e l'ipotesi ci assicura che $x = x_1$.

D'altra parte $x^2 + y^2 = |u'|^2 = 1 = |u_1| = x_1^2 + y_1^2$ e quindi $y_1 = \pm y$. Se $y_1 = y$ definiamo T mediante $T(u) = u_1$ e $T(v) = v_1$ altrimenti definiamo T mediante $T(u) = u_1$ e $T(v) = -v_1$. Entrambe queste applicazioni lineari stanno in $O(E)$ per il lemma 1 ed è facile controllare che soddisfano quanto richiesto.

Siccome una sola delle funzioni appena definite sta in $O^+(E)$ non ci possiamo aspettare di poter risolvere in tale gruppo il problema che abbiamo appena esaminato: le cose stanno proprio così come mostra il seguente esempio: prendiamo una base ortonormale (u,v) di E e poniamo $\Delta = \Delta_1 = \mathbb{R}^+u, \quad \Delta' = \mathbb{R}^+v, \quad \Delta'_1 = \mathbb{R}^+(-v)$; allora l'unico elemento di $O^+(E)$ che manda Δ in Δ_1 è l'identità, ed esso evidentemente non manda Δ' in Δ'_1.

Queste considerazioni ci suggeriscono di definire più accuratamente il concetto di angolo in un modo che la patologia che si è manifestata nell'ultimo esempio scompaia. Grazie al lemma 1, date due semirette Δ, Δ' esiste un'unico $T \in O^+(E)$ tale che $T(\Delta) = \Delta'$ e questo ci consente di definire una funzione

$$\mathcal{S}(E) \times \mathcal{S}(E) \xrightarrow{\Sigma} O^+(E)$$

che manda la coppia ordinata (Δ, Δ') nell'unica $T \in O^+(E)$ tale che $T(\Delta) = \Delta'$.

Definiamo una relazione d'equivalenza su $\mathcal{S}(E) \times \mathcal{S}(E)$ ponendo

$$(\Delta, \Delta') \sim (\Delta_1, \Delta'_1) \Leftrightarrow \Sigma(\Delta, \Delta') = \Sigma(\Delta_1, \Delta'_1).$$

In parole l'elemento di $O^+(E)$ che manda Δ in Δ' manda anche Δ_1 in Δ'_1.

Indichiamo con il simbolo $\mathcal{A}(E)$ il rispettivo insieme quoziente e con p la proiezione canonica. Gli elementi di $\mathcal{A}(E)$ sono detti *angoli orientati* in E, $p(\Delta, \Delta')$ si chiama *angolo orientato* tra Δ e Δ' e si indica con $\widehat{\Delta\Delta'}$. La funzione $\overline{\Sigma} : \mathcal{A}(E) \longrightarrow O^+(E)$ che manda $\widehat{\Delta\Delta'}$ in $\Sigma(\Delta, \Delta')$ è una corrispondenza biunivoca.

Definiamo un'operazione in $\mathcal{A}(E)$ ponendo

$$\widehat{\Delta\Delta'} + \widehat{\Delta_1\Delta'_1} = \widehat{\Delta T(\Delta'_1)}$$

dove $O^+(E) \ni T = \Sigma(\Delta_1, \Delta')$. Dobbiamo verificare la buona definizione: siano dunque R, R', R_1, R'_1 semirette in E tali che $\Sigma(\Delta, \Delta') = \Sigma(R, R') = H$, $\Sigma(\Delta_1, \Delta'_1) = \Sigma(R_1, R'_1) = K$ e dobbiamo verificare che $M = \Sigma(\Delta, T(\Delta'_1))$ coincide con $N = \Sigma(R, S(R'_1))$ dove $S = \Sigma(R_1, R')$. Le informazioni che abbiamo sono queste:

$$\begin{array}{llll} H(\Delta) = \Delta' & K(\Delta_1) = \Delta'_1 & T(\Delta_1) = \Delta' & M(\Delta) = T(\Delta'_1) \\ H(R) = R' & K(R_1) = R'_1 & S(R_1) = R' & N(R) = S(R'_1) \end{array}$$

e dobbiamo provare che $M = N$; useremo il punto 1 della proposizione 4 e la commutatività di $O^+(E)$.

$$M(\Delta) = T(\Delta_1') = T \circ K(\Delta_1) = K \circ T(\Delta_1) = K(\Delta') = K \circ H(\Delta)$$

e quindi $M = K \circ H$, inoltre

$$N(R) = S(R_1') = S \circ K(R_1) = K \circ S(R_1) = K(R') = K \circ H(R)$$

e quindi $N = K \circ H$ e la verifica è conclusa.

A questo punto non sarebbe difficile provare che $(\mathcal{A}(E), +)$ è un gruppo commutativo, ma otterremo lo stesso risultato ed in più scopriremo che $\overline{\Sigma}$ è un isomorfismo di gruppi se verifichiamo che, per ogni $\Delta, \Delta', \Delta_1, \Delta_1' \in \mathcal{S}(E)$ vale la relazione $\overline{\Sigma}(\widehat{\Delta\Delta'} + \widehat{\Delta_1\Delta_1'}) = \overline{\Sigma}(\widehat{\Delta\Delta'}) \circ \overline{\Sigma}(\widehat{\Delta_1\Delta_1'})$.

Siano dunque $T = \Sigma(\Delta_1, \Delta')$, $H = \Sigma(\Delta, \Delta')$, $K = \Sigma(\Delta_1, \Delta_1')$, $M = \Sigma(\Delta, T(\Delta_1'))$, avremo allora

$$M(\Delta) = T(\Delta') = T \circ K(\Delta_1) = K \circ T(\Delta_1) = K(\Delta') = K \circ H(\Delta)$$

Quindi, sempre per il punto 1 della proposizione 4, $M = K \circ H = H \circ K$ e la verifica va a buon fine.

Proposizione 6. *Se* $\Delta, \Delta', \Delta_1, \Delta_1' \in \mathcal{S}(E)$ *allora*

1. $\widehat{\Delta\Delta'} = \widehat{\Delta_1\Delta_1'} \Leftrightarrow \exists S \in O^+(E)$ *tale che* $S(\Delta) = \Delta_1$ *e* $S(\Delta') = \Delta_1' \Leftrightarrow \widehat{\Delta\Delta_1} = \widehat{\Delta'\Delta_1'}$.

2. $\widehat{\Delta\Delta'} + \widehat{\Delta'\Delta_1} = \widehat{\Delta\Delta_1}$.

3. *Per ogni* $S \in O^+(E)$, $\quad \widehat{\Delta\Delta'} = \widehat{S(\Delta)S(\Delta')}$.

4. $\widehat{\Delta\Delta'} + \widehat{\Delta'\Delta} = 0$.

5. *Per ogni* $S \in O^-(E)$, $\quad \widehat{\Delta\Delta'} = -\widehat{S(\Delta)S(\Delta')}$.

Dimostrazione. 1. Se $T = \overline{\Sigma}(\widehat{\Delta\Delta'}) = \overline{\Sigma}(\widehat{\Delta_1\Delta_1'})$ e $S(\Delta) = \Delta_1$ allora

$$S(\Delta') = S \circ T(\Delta) = T \circ S(\Delta) = T(\Delta_1) = \Delta_1'.$$

2. Ovvio.

3. Se $T = \overline{\Sigma}(\widehat{\Delta\Delta'})$ allora
$$T(S(\Delta)) = S(T(\Delta)) = S(\Delta').$$

4. Segue ovviamente da 2.

5. Se $T = \overline{\Sigma}(\widehat{\Delta\Delta'})$ dobbiamo provare che $T^{-1} = \overline{\Sigma}(\widehat{S(\Delta)S(\Delta')})$ ed è facile perché, usando il punto 3 del corollario 3, $T^{-1}(S(\Delta)) = S(T(\Delta)) = S(\Delta')$.

$\square$

Scegliendo un'orientazione α su E possiamo definire il concetto di *misura di un angolo orientato* $\widehat{\Delta\Delta'}$ come quella di $\overline{\Sigma}(\widehat{\Delta\Delta'})$.

In sintesi t è una α-misura di $\widehat{\Delta\Delta'} \Leftrightarrow \theta(\widehat{\Delta\Delta'}) = \phi(t) = e^{it}$.

Analogamente per la misura principale.

Viene spontaneo cercare di confrontare la misura principale di un angolo orientato $\widehat{\Delta\Delta'}$ con il numero $\overline{\Delta\Delta'}$. Se $\Delta = \Delta'$ allora $\overline{\Sigma}(\widehat{\Delta\Delta'}) = \mathrm{id}_E$ e quindi, indipendentemente dalla base (ortonormale) che si sceglie per calcolare la misura principale essa è $0 = \overline{\Delta\Delta'}$. Analogamente se $\Delta = -\Delta'$ allora la misura principale di $\widehat{\Delta\Delta'}$ è $\pi = \overline{\Delta\Delta'}$.

Tuttavia sarebbe davvero ingenuo pensare che i due numeri coincidano sempre: anzitutto la misura principale di $\widehat{\Delta\Delta'}$ può assumere qualsiasi valore in $[0, 2\pi[$ mentre $\overline{\Delta\Delta'}$ non eccede π, inoltre $\widehat{\Delta\Delta'} = -\widehat{\Delta'\Delta}$, mentre $\overline{\Delta\Delta'} = \overline{\Delta'\Delta}$.

Escludendo i due casi banali che abbiamo esaminato ogni coppia ordinata di vettori $v \in \Delta$, $v' \in \Delta'$ definisce una base di E. Se α è un'orientazione di E, il fatto che la base (v, v') appartenga o meno ad α evidentemente non dipende dalla scelta di v, v' e quindi possiamo, in un piano euclideo orientato (E, α), definire il concetto di coppia ordinata di semirette positiva o negativa.

Teorema 3. *Siano $\Delta \neq \pm\Delta'$ due semirette in un piano euclideo orientato (E, α) e sia t la misura principale di $\widehat{\Delta\Delta'}$ allora*

1. *(Δ, Δ') è una coppia positiva se e solo se $t \in]0, \pi[$ ed in tal caso $\overline{\Delta\Delta'} = t$.*

2. *(Δ, Δ') è una coppia negativa se e solo se $t \in]\pi, 2\pi[$ ed in tal caso $\overline{\Delta\Delta'} = 2\pi - t$.*

Dimostrazione. Sia u un vettore unitario in Δ, v l'unico vettore tale che $\mathcal{B} = (u, v)$ è una base ortonormale positiva e u' un vettore unitario in Δ'. Scrivendo $u' = xu + yv$ avremo che $\cos(\overline{\Delta\Delta'}) = x$ e che $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{(u,u')}(\mathrm{id}_E) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$. In altri termini la coppia ordinata di semirette è positiva se $y > 0$ e negativa se $y < 0$.

Sia $O^+(E) \ni T = \Sigma(\Delta, \Delta')$, il che significa semplicemente che $T(u) = u'$; allora $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$. Dire che t è una misura di $\widehat{\Delta\Delta'}$ significa che $\cos t = x$ e $\sin t = y$.

Dunque $y > 0$ se e solo se $t \in]0, \pi[$ e $y < 0$ se e solo se $t \in]\pi, 2\pi[$. E questo dimostra le due equivalenze nell'enunciato.

Inoltre $\cos t = x = \cos(\overline{\Delta\Delta'})$ che, se $t \in]0, \pi[$, ci permette di concludere che $t = \overline{\Delta\Delta'}$; se invece $t \in]\pi, 2\pi[$, allora $2\pi - t \in]0, \pi[$ e si termina la dimostrazione osservando che $\cos(2\pi - t) = \cos t = \cos(\overline{\Delta\Delta'})$. □

In sintesi per calcolare $\overline{\Delta\Delta'}$ si deve scegliere un'orientazione su E in modo che la coppia ordinata (Δ, Δ') sia positiva e poi si prende la misura principale di $\widehat{\Delta\Delta'}$.

Se Δ è una semiretta in E indichiamo con il simbolo $\overline{\Delta}$ l'unica retta di E che contiene Δ (cioè, se $\Delta = \mathbb{R}^+ v$, allora $\overline{\Delta} = \mathbb{R}v$).

Definizione 4. *Siano Δ, Δ', Δ'' semirette in E, si dice che Δ'* è tra *Δ e Δ'' se si verifica una delle seguenti eventualità:*

- $\Delta = \Delta' = \Delta''$
- $\Delta = -\Delta''$
- $\Delta \neq \pm\Delta''$ *e Δ' è contenuta sia nel semipiano individuato da $\overline{\Delta}$ che contiene Δ'' sia nel semipiano individuato da $\overline{\Delta''}$ che contiene Δ.*

Chiameremo le prime due eventualità casi banali, perché lo sono. La terza ha un aspetto molto intricato, anche se facilmente visualizzabile e del tutto intuitivo; urge pertanto un criterio che la renda trattabile:

Lemma 2. *Siano Δ, Δ', Δ'' semirette in E tali che $\Delta \neq \pm\Delta''$, le seguenti condizioni sono equivalenti*

1. *Δ' è tra Δ e Δ''.*

2. $\forall v \in \Delta$, $\forall v' \in \Delta', \forall v'' \in \Delta''$ *v' è una combinazione lineare a coefficienti non negativi di v e v''.*

3. $\exists u \in \Delta$, $\exists u' \in \Delta', \exists u'' \in \Delta''$ *tali che u' è una combinazione lineare a coefficienti non negativi di u e u''.*

Dimostrazione. Siano $L, L'' \in \mathrm{Hom}(E, \mathbb{R})$ tali che $\mathrm{Ker}L = \overline{\Delta}$, $\mathrm{Ker}L'' = \overline{\Delta''}$, L è positiva su Δ'' e L'' è positiva su Δ. La condizione Δ' è tra Δ e Δ'' si traduce nel fatto che L e L'' sono entrambe non negative su Δ'.

$1 \Rightarrow 2$ Visto che v, v'' sono linearmente indipendenti, possiamo certamente scrivere $v' = xv + yv''$, ma

$$0 \leq L(v') = xL(v)+yL(v'') = yL(v'') \text{ e } 0 \leq L''(v') = xL''(v)+yL''(v'') = xL''(v);$$

Siccome $L(v'') > 0$, $L''(v) > 0$ segue che x, y sono non negativi.

$2 \Rightarrow 3$ Ovvio.

$3 \Rightarrow 1$ Siano u, u', u'' come in 3 e sia $u' = xu + yu''$ con $x \geq 0, y \geq 0$. Per ogni $v' \in \Delta'$ $\exists \lambda > 0$ tale che $v' = \lambda u'$ ma allora

$$L(v') = \lambda L(u') = \lambda x L(u) + \lambda y L(u'') = \lambda y L(u'') \geq 0 \text{ e}$$

$$L''(v') = \lambda L''(u') = \lambda x L''(u) + \lambda y L''(u'') = \lambda x L''(u) \geq 0;$$

quindi sia L che L'' sono non negative su Δ'. □

Corollario 4. *Se Δ' è tra Δ e Δ'' allora $\overline{\Delta\Delta''} = \overline{\Delta\Delta'} + \overline{\Delta'\Delta''}$.*

Dimostrazione. Siano $u \in \Delta$, $u' \in \Delta'$, $u'' \in \Delta''$ vettori unitari. Se le tre semirette non sono tutte distinte uno (almeno) degli addendi della formula da provare è 0 e quindi l'uguaglianza sussiste. D'ora in poi supporremo quindi che siano distinte.

Se $\Delta = -\Delta''$ e $t = \overline{\Delta\Delta'}$ allora $t \in [0, \pi]$ e $\cos t = \langle u, u' \rangle$ da cui segue che $\cos(\pi - t) = -\cos t = \langle u'', u' \rangle$ e quindi, dato che $\pi - t \in [0, \pi]$ abbiamo che

$$\overline{\Delta\Delta'} + \overline{\Delta'\Delta''} = \pi = \overline{\Delta\Delta''}.$$

Ci resta da esaminare il caso in cui i vettori u, u', u'' sono, a due a due, linearmente indipendenti. Scriviamo $u' = xu + yu''$, con $x, y > 0$ per il lemma precedente. Si verifica immediatamente che le basi (u, u'), (u, u'') e (u', u'') sono tutte concordi e chiamiamo α l'orientazione a cui esse appartengono. Usiamo questa orientazione per trovare la misura principale degli angoli orientati $\widehat{\Delta\Delta'}$ e $\widehat{\Delta'\Delta''}$. Per il punto 1 della proposizione 3 avremo che $t = \overline{\Delta\Delta'}$ e $s = \overline{\Delta'\Delta''}$ sono le misure principali di $\widehat{\Delta\Delta'}$ e $\widehat{\Delta'\Delta''}$ rispettivamente.

Ma, per il punto 2 della proposizione 6, $\widehat{\Delta\Delta''} = \widehat{\Delta\Delta'} + \widehat{\Delta'\Delta''}$, inoltre $\theta = \theta_\alpha : \mathcal{A}(E) \longrightarrow S^1$ e $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ sono omomorfismi di gruppi e allora

$$\theta(\widehat{\Delta\Delta''}) = \theta(\widehat{\Delta\Delta'} + \widehat{\Delta'\Delta''}) = \theta(\widehat{\Delta\Delta'})\theta(\widehat{\Delta'\Delta''}) = \phi(t)\phi(s) = \phi(t+s).$$

Quindi $t+s$ è una misura di $\widehat{\Delta\Delta''}$, anzi è la sua misura principale.

Usando di nuovo il punto 1 della proposizione 3 si trova che $\overline{\Delta\Delta''} = t+s$ e la dimostrazione è completa

□

Adesso studiamo con attenzione l'insieme $O^-(E)$. Indichiamo con $G(1,E)$ l'insieme di tutte le rette di E.

Proposizione 7. *Ogni elemento di $O^-(E)$ ha 1 e -1 come autovalori; i rispettivi autospazi sono ortogonali.*

Fissata $W \in G(1,E)$ esiste un'unica $\sigma_W \in O^-(E)$ tale che $W = \{v \in E$ tali che $\sigma_W(v) = v\}$, cioè la funzione Fiss : $O^-(E) \longrightarrow G(1,E)$ *che associa ad ogni riflessione il sottospazio dei suoi punti fissi è una corrispondenza biunivoca.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di E e $S \in O^-(E)$, allora $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(S) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ con $a^2+b^2=1$ e quindi il polinomio caratteristico di S è t^2-1. questo dimostra la prima affermazione; se u, v sono autovettori di 1 e -1 rispettivamente allora

$$\langle v, u\rangle = \langle S(v), S(u)\rangle = \langle v, -u\rangle = -\langle v, u\rangle.$$

Sia $v \in W$ un vettore unitario; chiamando σ_W l'unico elemento di $O^-(E)$ che fissa v (cfr. il punto 2 della proposizione 4) si ottiene quanto desiderato. □

Siano Δ, Δ' semirette in E, per la proposizione appena dimostrata e per il punto 2 della proposizione 4 esiste un'unica $W \in G(1,E)$ tale che $\sigma_W(\Delta) = \Delta'$, tale retta è chiamata la *bisettrice* della coppia ordinata (Δ, Δ'); siccome $\sigma_W^2 = \mathrm{id}_E$ essa è anche la bisettrice di (Δ', Δ).

Proposizione 8. *Siano Δ, Δ' semirette in E, W la loro bisettrice: allora*

1. *Se $\Delta = \Delta'$ allora $W = \overline{\Delta}$.*

2. *Se* $\Delta = -\Delta'$ *allora* $W = \overline{\Delta}^{\perp}$.

3. *Se* $\Delta \neq -\Delta'$, $u \in \Delta$, $u' \in \Delta'$ *sono vettori unitari allora* $W = \mathcal{L}(u+u')$ *e* $W^{\perp} = \mathcal{L}(u - u')$.

4. $T \in O^{+}(E)$ *soddisfa* $T^2(\Delta) = \Delta'$ *se e solo se* $\overline{T(\Delta)} = W$*; in particolare* $\{T \in O^{+}(E)$ *tali che* $T^2(\Delta) = \Delta'\}$ *ha esattamente due elementi e uno si ottiene dall'altro componendo con* $-\mathrm{id}_E$.

Dimostrazione. Le prime due affermazioni sono ovvie. Per quanto riguarda la terza ci basta dimostrare che $\sigma_W(u + u') = u + u'$ e questo è ovvio in quanto $\sigma_W(u) = u'$ e $\sigma_W(u') = u$.

La quarta affermazione si dimostra così

$$\overline{T(\Delta)} = W \Leftrightarrow T(\Delta) = \sigma_W(T(\Delta)) \Leftrightarrow T^2(\Delta) = T \circ \sigma_W \circ T(\Delta) = \sigma_W(\Delta) = \Delta'$$

in quanto $T \circ \sigma_W = \sigma_W \circ T^{-1}$ (cfr. il punto 3 della proposizione 3). $\square$

Se W è una retta nello spazio euclideo E possiamo definire la *proiezione ortogonale* $\mathrm{pr}_W : E \longrightarrow W$ come segue: scegliamo un vettore $0 \neq w \in W$ e poniamo, per ogni $v \in E$, $\mathrm{pr}_W(v) = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w$; chiaramente questa funzione non dipende dalla scelta di w, e, se si ha l'accortezza di scegliere w unitario la definizione si semplifica in $\mathrm{pr}_W(v) = \langle v, w\rangle w$; è anche immediato verificare che si tratta di un'applicazione lineare.

Proposizione 9. *La proiezione ortogonale* $\mathrm{pr}_W : E \longrightarrow W$ *gode delle seguenti proprietà:*

1. $v \in W$ *se e solo se* $\mathrm{pr}_W(v) = v$. *In particolare la proiezione ortogonale è suriettiva e* $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_W) = W^{\perp}$.

2. *Per ogni* $v \in E$, $v - \mathrm{pr}_W(v) \in W^{\perp}$.

3. *Per ogni* $v \in E$, $\mathrm{pr}_W(v) \neq u \in W$, $|v - u| > |v - \mathrm{pr}_W(v)|$, *cioè* $\mathrm{pr}_W(v)$ *è il vettore di* W *più vicino a* v*; il numero* $|v - \mathrm{pr}_W(v)|$ *è detto la* distanza *da* v *a* W *e indicato con* $\mathrm{d}(v, W)$.

Dimostrazione. Solo la terza affermazione merita una verifica. poniamo $v' = \mathrm{pr}_W(v)$ e calcoliamo

$$|v - u|^2 = \langle v - u, v - u\rangle = \langle v - v' + v' - u, v - v' + v' - u\rangle =$$

$$\langle v-v', v-v'\rangle + 2\langle v-v', v'-u\rangle + \langle v'-u, v'-u\rangle = |v-v'|^2 + |v'-u|^2$$

in quanto $v'-u \in W$ mentre $v-v' \in W^\perp$. $\square$

Proposizione 10. *Siano* Δ, Δ' *semirette in* E *con* $\Delta \neq \pm\Delta'$ *e sia* W *la loro bisettrice. Consideriamo poi l'insieme* $\mathrm{Eqd}(\overline{\Delta}, \overline{\Delta'}) = \{v \in E$ *tali che* $\mathrm{d}(v, \overline{\Delta}) = \mathrm{d}(v, \overline{\Delta'})\}$ *Allora*

$$\mathrm{Eqd}(\overline{\Delta}, \overline{\Delta'}) = W \cup W^\perp$$

Dimostrazione. Siano $u \in \Delta, u' \in \Delta'$ due vettori unitari e $v = xu + yu' \in E$. Calcoliamo $\mathrm{d}(v, \overline{\Delta})^2 = \langle v - \langle v, u\rangle u, v - \langle v, u\rangle u\rangle = |v|^2 - \langle v, u\rangle^2$, ma $\langle v, u\rangle = x + y\langle u', u\rangle$ e quindi, in definitiva, $\mathrm{d}(v, \overline{\Delta})^2 = |v|^2 - x^2 - y^2\langle u', u\rangle^2 - 2xy\langle u', u\rangle$ e, analogamente $\mathrm{d}(v, \overline{\Delta'})^2 = |v|^2 - y^2 - x^2\langle u', u\rangle^2 - 2xy\langle u', u\rangle$ e quindi avremo che $\mathrm{d}(v, \overline{\Delta}) = \mathrm{d}(v, \overline{\Delta'}) \Leftrightarrow x^2(1 - \langle u', u\rangle^2) = y^2(1 - \langle u', u\rangle^2)$ cioè se e solo se $x = \pm y$, in quanto $\langle u', u\rangle^2 \neq 1$, per la disuguaglianza di Schwartz, trattandosi di due vettori unitari e linearmente indipendenti.

Se $y = x$ avremmo che $v = x(u+u') \in W$ per il punto 3 della proposizione 8, se invece $y = -x$ allora $v = x(u - u') \in W^\perp$. $\square$

Dato $v \in \mathrm{Eqd}(\overline{\Delta}, \overline{\Delta'})$ possiamo riconoscere se sta in W piuttosto che in $W^\perp$ mediante la seguente procedura: siano L, L' due operatori lineari su E tali che $\mathrm{Ker}(L) = \overline{\Delta}$ e $\mathrm{Ker}(L') = \overline{\Delta'}$, e scelti con coerenza, cioè in modo che $L_{|\Delta'}$ e $L'_{|\Delta}$ siano concordi. Avremo allora che $0 \neq v \in W \Leftrightarrow L(v) \cdot L'(v) > 0$. Avremo infatti che, scelti u, u' come nella dimostrazione appena finita,$v = xu + yu'$ con $y = x$ quando $v \in W$ e $y = -x$ quando $v \in W^\perp$. Ma $L(v) = yL(u')$ e $L'(v) = xL'(u)$, così $0 < L(v) \cdot L'(v) = xyL(u')L'(u) \Leftrightarrow xy > 0 \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow v \in W$.

5 Applicazioni

In questa sezione indicheremo semplicemente con X uno spazio affine euclideo $(X, \overline{X}, -, \langle\ ,\ \rangle)$.

Definizione 5. *Un* triangolo *in* X *è un sottoinsieme* $\mathcal{T} = \{A, B, C\}$ *costituito da tre punti non allineati di* X.

Lapidaria. Ma adesso dobbiamo definire gli accessori di un triangolo, e l'interferenza della terminologia tradizionale ci obbliga a commettere il grande crimine della matematica: indicare con lo stesso simbolo e chiamare con lo stesso nome oggetti abissalmente diversi; quindi la lettrice è invitata a leggere la prossima definizione con la massima cautela

Definizione 6. *Sia $\mathcal{T} = \{A, B, C\}$ un triangolo. Il* lato *a di $\mathcal{T}$ è uno dei seguenti concetti tra cui chi legge deve scegliere caso per caso*

Lat1 *La retta (affine) passante per B e C, cioè*

$$a = \{B + t(C - B) \text{ tali che } t \in \mathbb{R}\}$$

Lat2 *Il segmento di estremi B e C, cioè*

$$a = \{B + t(C - B) \text{ tali che } t \in \mathbb{R} \text{ e } 0 \leq t \leq 1$$

Lat3 *La lunghezza di tale segmento, cioè*

$$a = \mathrm{d}(B, C) = |B - C|$$

Analogamente per i lati b e c.

Per ogni $P \neq Q \in X$ indichiamo con Δ_{PQ} la semiretta generata dal vettore $Q - P$, chiaramente $\Delta_{PQ} = -\Delta_{QP}$.

Definizione 7. *L'*angolo *α è uno dei seguenti concetti tra cui chi legge deve scegliere caso per caso*

Ang1 *La coppia ordinata $(A, \{\Delta_{AB}, \Delta_{AC}\})$.*

Ang2 *L'angolo menzionato nella definizione 3 tra le semirette Δ_{AB} e Δ_{AC}, cioè*

$$\cos\alpha = \frac{\langle B - A, C - A\rangle}{|B - A||C - A|}$$

Analogamente per gli angoli β e γ.

Se l'angolo α è interpretato nel senso $Ang1$ possiamo decidere che la sua bisettrice *è la retta (affine) passante per A e che ha per giacitura la bisettrice delle semirette Δ_{AB} e Δ_{AC} nel senso della proposizione 4. Analogamente per le bisettrici degli angoli β e γ.*

Conviene introdurre un concetto non presente nella geometria elementare

Definizione 8. *Sia $\mathcal{T} = \{A, B, C\}$ un triangolo. La* funzione supporto *del lato a è la mappa affine $f_a : X \longrightarrow \mathbb{R}$ caratterizzata da $f_a(B) = f_a(C) = 0$ e $f_a(A) = 1$.*

Analogamente si definiscono f_b e f_c.

Naturalmente abbiamo usato il fatto che una mappa affine è completamente determinata dal suo comportamento su un riferimento affine.

La mappa affine $f_a + f_b + f_c$ vale sempre 1 su A, B e C, e quindi vale 1 su tutti gli elementi di X.

Esaminiamo un teorema, la ben nota *formula di Carnot*, con lo scopo di esemplificare che la geometria del muratore e del falegname, oltre ad avere l'imperdonabile difetto di essere un edificio privo di fondamenta, in certe situazioni può anche essere meno efficiente della visione rigorosa proposta in queste note.

Teorema 4. *In un triangolo $\mathcal{T} = \{A, B, C\}$ vale la relazione*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Dimostrazione. Evidentemente i lati devono essere interpretati nel senso $Lat3$ e l'angolo nel senso $Ang2$. La dimostrazione è un conto facilissimo:

$$a^2 = |C - B|^2 = \langle C - B, C - B\rangle = \langle (C - A) + (A - B), (C - A) + (A - B)\rangle =$$

$$\langle C-A, C-A\rangle + \langle A-B, A-B\rangle + 2\langle C-A, A-B\rangle = b^2 + c^2 - 2\langle C-A, B-A\rangle =$$

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

usando pedissequamente la definizione 3. □

Dei prossimi teoremi, molto ben noti, vengono fornite dimostrazioni rigorose; inoltre esse vengono paragonate con quelle in uso nella geometria del muratore e del falegname, evidenziando l'errore che si commette generalmente in queste ultime.

Teorema 5. *In un triangolo $\mathcal{T} = \{A, B, C\}$ la somma degli angoli vale π, cioè*

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

Dimostrazione. Evidentemente gli angoli devono essere interpretati come in $Ang2$. Introduciamo altri due punti $D = C + (C - A)$ e $E = C + (B - A)$,così, nello spazio vettoriale euclideo $\overline{X}$, abbiamo che

$$\Delta_{AC} = \Delta_{CD}, \quad \Delta_{AB} = \Delta_{CE}$$

Così avremo, per la definizione 3, che $\overline{\Delta_{CD}\Delta_{CE}} = \alpha, \quad \overline{\Delta_{CB}\Delta_{CA}} = \gamma$ e anche che

$$\cos\beta = \frac{\langle A-B, C-B\rangle}{|A-B||C-B|} = \frac{\langle B-A, B-C\rangle}{|B-A||B-C|} = \frac{\langle E-C, B-C\rangle}{|E-C||B-C|}$$

cioè anche $\overline{\Delta_{CE}\Delta_{CB}} = \beta$ e sembra al dilettante (magari facendo intervenire considerazioni sugli angoli alterni interni e corrispondenti di rette parallele che nel nostro approccio sono del tutto superflue) di poter concludere che

$$\alpha+\beta+\gamma = \overline{\Delta_{CD}\Delta_{CE}} + \overline{\Delta_{CE}\Delta_{CB}} + \overline{\Delta_{CB}\Delta_{CA}} =$$

$$\overline{\Delta_{CD}\Delta_{CB}} + \overline{\Delta_{CB}\Delta_{CA}} = \overline{\Delta_{CD}\Delta_{CA}} = \overline{\Delta_{AC}\Delta_{CA}} = \overline{-\Delta_{CA}\Delta_{CA}} = \pi$$

Questo argomento non è corretto, possiamo solo dire che

$$\Delta_{\widehat{CD}\Delta_{CE}} + \Delta_{\widehat{CE}\Delta_{CB}} + \Delta_{\widehat{CB}\Delta_{CA}} = \Delta_{\widehat{CD}\Delta_{CB}} + \Delta_{\widehat{CB}\Delta_{CA}} = \Delta_{\widehat{CD}\Delta_{CA}}$$

L'errore consiste nell'aver interpretato gli angoli come nella definizione 3 e poi averli sommati come angoli orientati, cioè nel gruppo $\mathcal{A}(\overline{X})$, si veda la proposizione 6.

Per fortuna questo tentativo non è del tutto infruttuoso, grazie al corollario 4, ci basterebbe controllare se

- Δ_{CE} è tra Δ_{CD} e Δ_{CB}
- Δ_{CB} è tra Δ_{CD} e Δ_{CA}

La seconda verifica è automatica in quanto $\Delta_{CD} = -\Delta_{CA}$. Per quanto riguarda la prima, usando il lemma 2, dovremmo vedere se $B-C$ è una combinazione lineare a coefficienti non negativi di $E-C$ e $A-C$, ed è proprio così perché

$$B-C = (B-A)+(A-C) = (E-C)+(A-C)$$

quindi i coefficienti necessari sono entrambi 1 e si rappezza il difetto della dimostrazione classica. □

Anche in uno spazio affine euclideo possiamo definire la distanza da un punto P ad una retta a: basta scegliere due punti $B, C \in a$, definire la *proiezione ortogonale* $\mathrm{pr}_a(P) = B + \frac{\langle P-B, C-B\rangle}{|C-B||C-B|}(C-B)$, verificare che questa definizione non dipende dalla scelta di B e C, che $P-\mathrm{pr}_a(P) \in \overline{a}^\perp$, che $\mathrm{pr}_a(P)$ è il punto di a più vicino a P e definire $\mathrm{d}(P,a) = |P - \mathrm{pr}_a(P)|$. La prima di queste verifiche, se affrontata brutalmente, potrebbe risolversi in calcoli spacevoli; conviene evitarli così: rassegnarsi temporaneamente alla dipendenza di $\mathrm{pr}_a(P)$ dalla scelta di B e C, ma controllare che $\langle P - \mathrm{pr}_a(P), C - B\rangle = 0$, prendere altri due punti B', C' su a e indicare con $\mathrm{pr}'_a(P)$ la proiezione ortogonale di p su a così ottenuta. Naturalmente avremo di nuovo che $P-\mathrm{pr}'_a(P)$ è ortogonale a $C' - B'$, e quindi $\mathrm{pr}_a(P)$ e $\mathrm{pr}'_a(P)$ stanno entrambi sulla retta per P che ha per giacitura $\overline{a}^\perp$, ma essi stanno anche su a e due rette non parallele si intersecano in un solo punto.

Si verifica immediatamente che, se $B \in a$, allora

$$\mathrm{d}(P,a) = \mathrm{d}(P - B, \overline{a})$$

Usando il concetto di distanza e le funzioni di supporto dei lati possiamo distinguere quando un punto P sta sulla bisettrice dell'angolo γ.

Proposizione 11. *$C \neq P \in C+W_C$ se e solo se valgono entrambe le seguenti condizioni*

- $\mathrm{d}(P,a) = \mathrm{d}(P,b)$
- $f_a(P) \cdot f_b(P) > 0$.

Dimostrazione. Sostanzialmente è già fatta, basta osservare che $\overline{f}_a$ è positiva sulla semiretta Δ_{CA} e che $\overline{f}_b$ è positiva sulla semiretta Δ_{CB} e usare la proposizione 10 e l'osservazione che la segue. □

Teorema 6. *Le bisettrici di un triangolo $\mathcal{T} = \{A, B, C\}$ hanno un punto in comune.*

Dimostrazione. Indichiamo con $A+W_A$, $B+W_B$, $C+W_C$ le bisettrici. Cominciamo con l'osservare che $A+W_A$ e $B+W_B$ non sono parallele, infatti, se, per assurdo, $W_A = W_B = W$, allora $\sigma_W(\Delta_{AC}) = \sigma_{W_A}(\Delta_{AC}) = \Delta_{AB}$ e $\sigma_W(\Delta_{BA}) = \sigma_{W_B}(\Delta_{BA}) = \Delta_{BC} = -\Delta_{CB}$ da cui $\Delta_{AC} = \sigma_W \circ \sigma_W(\Delta_{AC}) = \sigma_W(\Delta_{AB}) = -\sigma_W(\Delta_{BA}) = -\Delta_{CB}$, contraddicendo il fatto che i vettori $B - A$ e $C - B$ sono linearmente indipendenti (che è precisamente la stessa informazione che i punti A, B, C non sono allineati).

Ne segue che esiste un unico punto $P \in (A+W_A) \cap (B+W_B)$. Tale punto è caratterizzato da $\mathrm{d}(P,c) = \mathrm{d}(P,b)$ e $f_c(P) \cdot f_b(P) > 0$ in quanto $P \in (A+W_A)$ e da $\mathrm{d}(P,c) = \mathrm{d}(P,a)$ e $f_c(P) \cdot f_a(P) > 0$ in quanto $P \in (B+W_B)$.

Si tratta ovviamente di controllare che $P \in C + W_C$.

Avremo che $\mathrm{d}(P, c) = \mathrm{d}(P, b) = \mathrm{d}(P, a)$, dove i lati del triangolo sono interpretati come in $Lat1$. Avremo dunque che $P \in C + W_C$ oppure $P \in C + W_C^{\perp}$; la dimostrazione ingenua del nostro teorema non prende in considerazione questa seconda eventualità.

Ma noi sì. Da $f_c(P) \cdot f_b(P) > 0$ e $f_c(P) \cdot f_a(P) > 0$ segue che

$$0 < f_c(P) \cdot f_b(P) \cdot f_c(P) \cdot f_a(P) = f_a(P) \cdot f_b(P) \cdot f_c(P)^2$$

e quindi $f_a(P) \cdot f_b(P) > 0$. E la dimostrazione è completa. $\square$

In realtà $f_c(P)$, $f_b(P)$, $f_a(P)$ sono tutti e tre positivi, cioè P è un punto *interno* al triangolo. L'alternativa è che siano tutti e tre negativi, ma questo è impossibile visto che $f_a(P) + f_b(P) + f_c(P) = 1$.

6 Congruenze e similitudini

Le *figure* sono i sottoinsiemi di uno spazio affine euclideo X. Due figure Y, Z si dicono *congruenti* se esiste una isometria $f : X \longrightarrow X$ tale che $f(Y) = Z$. Evidentemente la congruenza stabilisce una relazione d'equivalenza sull'insieme di tutte le figure di X.

Se $\mathcal{T} = \{A, B, C\}$ e $\mathcal{T}' = \{A', B', C'\}$ sono triangoli in un piano affine euclideo X, siccome (A, B, C) e (A', B', C') sono entrambi riferimenti affini di X, esiste un'unico isomorfismo affine $f : X \longrightarrow X$ tale che $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$. Ovviamente $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ sono congruenti se e solo se tra i sei isomorfismi affini che mandano $\mathcal{T}$ in $\mathcal{T}'$ almeno uno è un'isometria.

In questa sezione lati ed angoli devono essere interpretati come in $Lat3$ e in $Ang2$ delle definizioni 6 e 7.

Teorema 7. *Nella notazione appena introdotta le seguenti condizioni sono equivalenti*

1. $a = a'$, $b = b'$, $\gamma = \gamma'$ *(primo criterio di congruenza LAL).*
2. $a = a'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ *(secondo criterio di congruenza ALA).*
3. $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ *(terzo criterio di congruenza LLL).*
4. f *è un'isometria.*

Dimostrazione. 1) $\Leftrightarrow$ 3). Dalla formula di Carnot abbiamo che $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ e $c'^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b'\cos\gamma'$.

1) $\Rightarrow$ 4).Usiamo il lemma 1 con $b_1 = A - C$, $b_2 = B - C$; abbiamo allora

$$\langle b_1, b_1\rangle = |A - C|^2 = b^2 = b'^2 = |A' - C'|^2 = |f(A) - f(C)|^2 =$$

$$\langle \overline{f}(A - C), \overline{f}(A - C)\rangle = \langle \overline{f}(b_1), \overline{f}(b_1)\rangle$$

$$\langle b_2, b_2\rangle = |B - C|^2 = b^2 = b'^2 = |B' - C'|^2 = |f(B) - f(C)|^2 =$$

$$\langle \overline{f}(B - C), \overline{f}(B - C)\rangle = \langle \overline{f}(b_2), \overline{f}(b_2)\rangle$$

$$\langle b_1, b_2\rangle = \langle A - C, B - C\rangle = ba\cos\gamma = b'a'\cos\gamma' = \langle A' - C', B' - C'\rangle =$$

$$\langle f(A) - f(C), f(B) - f(C)\rangle = \langle \overline{f}(A - C), \overline{f}(B - C)\rangle = \langle \overline{f}(b_1), \overline{f}(b_2)\rangle$$

4) $\Rightarrow$ 3). $a = \mathrm{d}(B, C) = \mathrm{d}(f(B), f(C)) = \mathrm{d}(B', C') = a'$ e analogamente per gli altri lati.

3) e 4) $\Rightarrow$ 2) $ac\cos\beta = \langle C - B, A - B\rangle = \langle \overline{f}(C - B), \overline{f}(A - B)\rangle = \langle f(C) - f(B), f(A) - f(B)\rangle = \langle C' - B', A' - B')\rangle = a'c'\cos\beta'$ da cui segue che $\beta = \beta'$. Analogamente si controlla che $\gamma = \gamma'$.

2) $\Rightarrow$ 4). Prendiamo $\lambda = \dfrac{b}{b'}$ e definiamo il triangolo $\mathcal{T}'' = \{A'' = C' + \lambda(A' - C'), C'' = C', B'' = B'\}$ con i relativi accessori, e sia $g : X \longrightarrow X$ l'isomorfismo affine definito da $g(A) = A''$, $g(B) = B''$, $g(C) = C''$.

In questo modo abbiamo che $a'' = |B'' - C''| = |B' - C'| = a' = a$, $b'' = |A'' - C''| = |A'' - C'| = |\lambda(A' - C')| = b$ e

$$ab\cos\gamma'' = a''b''\cos\gamma'' = \langle B'' - C'', A'' - C''\rangle = \langle B' - C', \lambda(A' - C')\rangle =$$

$$\lambda a'b'\cos\gamma' = ab\cos\gamma' = ab\cos\gamma$$

da cui si deduce che $\gamma = \gamma''$ e dunque, per il primo criterio, g è un'isometria.

Certamente A'' sta sulla retta s che passa per A' e C'; se riusciamo a provare che sta anche sulla retta $r = B' + \mathcal{L}(A' - B')$, visto che queste due rette non sono parallele avremo che $A' = A''$, cioè $f = g$ che è un'isometria, e si vince (alternativamente, arrivati a questo punto, avremo che $\lambda = 1$, cioè $b' = b$ e quindi avremo dimostrato che 4) $\Rightarrow$ 1), che va altrettanto bene).

L'idea è di controllare che un punto $P \neq B'$ sta su r se e solo se l'angolo tra i vettori $P - B'$ e $C' - B'$ è proprio β', che è uguale a β, e poi vedere che A'' soddisfa tale richiesta utilizzando il fatto che, visto che g è un'isometria, $\beta'' = \beta$.

Conviene definire la funzione $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$h(P) = \langle P - B', C' - B' - \frac{a'}{c'} \cos \beta' (A' - B') \rangle$$

si tratta evidentemente di una mappa affine, infatti scegliendo il punto B' si vede subito che la sua giacitura è data da

$$\overline{h}(v) = \langle v, C' - B' - \frac{a'}{c'} \cos \beta' (A' - B') \rangle$$

La funzione h si annulla in A' ed in B' ma non in C' e quindi $r = h^{-1}(0)$.

Adesso ci basta vedere che $h(A'') = 0$. Non è banale. Cominciamo con l'osservare da $\beta = \beta'$ e $\gamma = \gamma'$, usando il teorema 5 abbiamo $\alpha = \alpha'$. Inoltre

$$b \cos \alpha + a \cos \beta = b \frac{\langle C - A, B - A \rangle}{bc} + a \frac{\langle A - B, C - B \rangle}{ac} =$$

$$\frac{1}{c} \langle A - B, (A - C) + (C - B) \rangle = \frac{1}{c} \langle A - B, A - B \rangle = c$$

Adesso ci siamo

$$h(A'') = \langle A'' - B', C' - B' - \frac{a'}{c'} \cos \beta (A' - B') \rangle =$$

$$\langle A'' - B'', C'' - B'' - \frac{a}{c'} \cos \beta (A' - B'') \rangle =$$

$$\langle A'' - B'', C'' - B'' \rangle - \frac{a}{c'} \cos \beta \langle A'' - B'', A' - B'' \rangle =$$

$$ac \cos \beta - \frac{a}{c'} \cos \beta \langle A'' - B', A' - B' \rangle =$$

$$ac \cos \beta - \frac{a}{c'} \cos \beta (\langle (A'' - C') + (C' - B'), A' - B' \rangle) =$$

$$ac \cos \beta - \frac{a}{c'} \cos \beta (\langle A'' - C', A' - B' \rangle + \langle C' - B', A' - B' \rangle) =$$

$$ac \cos \beta - \frac{a}{c'} \cos \beta (\langle \lambda (A' - C'), A' - B' \rangle + \langle C' - B', A' - B' \rangle) =$$

$$ac\cos\beta - \frac{a}{c'}\cos\beta(\lambda\langle A'-C', A'-B'\rangle + a'c'\cos\beta) =$$
$$ac\cos\beta - \frac{a}{c'}\cos\beta(\lambda b'c'\cos\alpha + ac'\cos\beta) =$$
$$ac\cos\beta - a\cos\beta(b\cos\alpha + a\cos\beta) = 0 \quad \square$$

Definizione 9. *Una mappa affine $f : X \longrightarrow X$ si chiama* similitudine *se esiste $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda^{-1}\overline{f}$ è un operatore ortogonale. Il numero λ è detto* rapporto di *similitudine.*

Due figure Y, Z di X si dicono simili *se esiste una similitudine f tale che $f(Y) = Z$.*

Se $P \in X$ e $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ l'*omotetia* di centro P e rapporto λ è la similitudine $H_P^\lambda(Q) = P + \lambda(Q - P)$, la cui giacitura è $\lambda \mathrm{id}_{\overline{X}}$.

Anche l'essere simili stabilisce una relazione d'equivalenza sull'insieme di tutte le figure di X.

Teorema 8. *Nella solita notazione le seguenti condizioni sono equivalenti*

1. $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$, $\gamma = \gamma'$ *(primo criterio di similitudine LAL).*
2. $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ *(secondo criterio di similitudine ALA).*
3. $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$ *(terzo criterio di similitudine LLL).*
4. *f è una similitudine .*

Dimostrazione. 1) $\Rightarrow$ 4) Poniamo $\mu = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ e definiamo un nuovo triangolo $\mathcal{T}'' = \{A'', B'', C''\}$ dove $C'' = C'$, $A'' - C'' = \mu(A' - C')$, $B'' - C'' = \mu(B' - C')$. Avremo allora che $a'' = \mu a' = a$ e $b'' = \mu b' = b$, ma anche

$$\cos\gamma'' = \frac{\langle A'' - C'', B'' - C''\rangle}{a''b''} = \frac{\langle \mu(A' - C'), \mu(B' - C')\rangle}{\mu^2 a'b'} = \cos\gamma' = \cos\gamma$$

Dal primo criterio di congruenza si deduce che l'isomorfismo affine g definito da $g(A) = A''$, $g(B) = B''$, $g(C) = C''$ è un'isometria. Ma $g = H_{C'}^\mu \circ f$ e dunque $\overline{g} = \mu\overline{f}$ è un operatore ortogonale e f è una similitudine di rapporto $\lambda = \mu^{-1}$.

4) $\Rightarrow$ 1) Supponiamo che f sia una similitudine di rapporto λ, poniamo $\mu = \lambda^{-1}$ e definiamo l'isomorfismo affine $g : X \longrightarrow X$ mediante $g = H_{C'}^\mu \circ f$.

Allora g è un'isometria e, per il primo criterio di congruenza, il triangolo $\{A'' = G(A),\ B'' = g(B),\ C'' = g(C) = C'\}$ soddisfa $a'' = a$, $b'' = b$, $\gamma'' = \gamma$. Ma

$$a = a'' = |A'' - C''| = |\overline{g}(A - C)| = |\mu \overline{f}(A - C)| = |\mu(A' - C')| = \mu a'$$

analogamente $b = \mu b'$ e dunque $\dfrac{a'}{a} = \lambda = \dfrac{b'}{b}$

Inoltre

$$\cos\gamma = \cos\gamma'' = \frac{\langle A'' - C'', B'' - C''\rangle}{a''b''} = \frac{\langle \mu(A' - C'), \mu(B' - C')\rangle}{\mu^2 a' b'} = \cos\gamma'$$

In modo analogo, usando il secondo criterio di congruenza, si vede che 4) $\Rightarrow$ 2) ed usando il terzo si trova che 4) $\Rightarrow$ 3).

2) $\Rightarrow$ 4) Poniamo $\lambda = \dfrac{a'}{a}$, $\mu = \lambda^{-1}$ e $g = g = H^{\mu}_{C'} \circ f$. Con i calcoli ormai consueti ed usando il secondo criterio di congruenza si vede che g è un'isometria e dunque f è una similitudine.

Analogamente, per il terzo criterio di congruenza, si vede che 3) $\Rightarrow$ 4). $\square$

Indice analitico