Contare gli insiemi

Pino Vigna Suria

3 2 2004

Se m è un numero naturale poniamo $\overline{m} = \{n \in \mathbb{N} \text{ tali che } 1 \leq n \leq m\}$. In particolare $\overline{0} = \emptyset$. Un insieme A si dice *finito* se esiste un numero naturale m ed una corrispondenza biunivoca tra $\overline{m}$ ed A; in particolare l'insieme vuoto è finito. Si assiste ad un autentico miracolo su cui la matematica si appoggia come la vita biologica dipende dall'acqua:

Teorema 1. *Se $m, n \in \mathbb{N}$ esiste una corrispondenza biunivoca tra $\overline{n}$ e $\overline{m}$ se e solo se $m = n$.*

Grazie a questo teorema ha senso parlare del numero di elementi di un insieme finito A che indicheremo con $\sharp(A)$, ed è facile controllare che due insiemi finiti hanno lo stesso numero di elementi se e solo se esiste una corrispondenza biunivoca tra di loro. Questo suggerisce di lanciare una definizione che estende anche ad insiemi non finiti l'idea di essere "egualmente grandi ".

Definizione 1. *Sia A, B insiemi; si dice che A è* equipotente *con B se esiste una corrispondenza biunivoca $A \xrightarrow{f} B$. Se A e B sono equipotenti scriveremo $\sharp A = \sharp B$.*

Tornando a parlare di insiemi finiti si può notare (con dimostrazione!) che dati due numeri naturali n, m si ha che $n \leq m$ se e solo se esiste una funzione iniettiva $\overline{n} \xrightarrow{f} \overline{m}$ e concludere che A è *più piccolo* di B se e solo se esiste una funzione iniettiva $A \xrightarrow{f} B$; e quest'ultima condizione non ha alcun bisogno di coinvolgere insiemi finiti per essere enunciata. Perciò, dati due insiemi qualunque decidiamo cosa significa che A è più piccolo di B (in notazione $\sharp A \leq \sharp B$) secondo quanto abbiamo osservato. Diremo anche che A è *veramente più piccolo* di B se $\sharp A \leq \sharp B$ ma $\sharp A \neq \sharp B$; scriviamo allora $\sharp A < \sharp B$.

Se $A \xrightarrow{f} B$ è iniettiva e A non è vuoto esiste una funzione $B \xrightarrow{g} A$ tale che $g \circ f = \mathrm{id}_A$ ed è ovvio che g è suriettiva. Viceversa se $B \xrightarrow{g} A$ è suriettiva esiste (ma qui il discorso è molto più sottile, c'entra l'*assioma della scelta* di cui parleremo un'altra volta) una funzione $A \xrightarrow{f} B$ tale che $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e dunque f è iniettiva. In sostanza $\sharp A \leq \sharp B \Leftrightarrow \exists B \xrightarrow{g} A$ suriettiva.

Per fortuna il *teorema di Schröder-Bernstein* ci assicura che, se $\sharp A \leq \sharp B$ e $\sharp B \leq \sharp A$ allora $\sharp A = \sharp B$.

L'illusione che gli insiemi infiniti siano tutti della stessa grandezza è subito dissipata dal seguente

Teorema 2. *Per ogni insieme A, chiamato $\mathcal{P}(A)$ il suo insieme delle parti, si ha sempre che $\sharp A < \sharp\mathcal{P}(A)$.*

Dimostrazione. Evidentemente la funzione che manda un elemento di A nel suo singoletto è iniettiva. Viceversa, se $A \xrightarrow{f} \mathcal{P}(A)$, poniamo $B = \{a \in A \text{ tali che } a \notin f(a)\}$; nessun $a \in A$ può soddisfare $f(a) = B$ in quanto tale a non può stare né in B né nel suo complementare. Quindi non ci sono funzioni suriettive in $\mathcal{P}(A)^A$ $\square$

Prendiamo un insieme con due elementi, per esempio $\{0, 1\}$; si vede facilmente che, per ogni insieme A, la funzione $\{0, 1\}^A \xrightarrow{\phi} \mathcal{P}(A)$ che manda f in $f^{-1}(1)$ è una corrispondenza biunivoca.

Concluderemo questa nota provando che $\sharp\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \sharp\mathbb{R}$. Sistemando qualche facile dettaglio tecnico si vede che $\sharp\mathbb{R} = \sharp[0, 2]$; la funzione $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\psi} [0, 2]$ data da $\psi(f) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)2^{-n}$ è suriettiva (non iniettiva perché $0,\overline{1} = 1$).

D'altra parte la funzione $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\Psi} [0, 2]$ data da $\psi(f) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)3^{-n}$ è iniettiva (non suriettiva, nella sua immagine mancano tutti i numeri reali che hanno almeno un 2 nel loro sviluppo ternario).