Il determinante

Pino Vigna Suria

17 novembre 2010

In queste note, per ogni numero naturale n, indicheremo con $\overline{n}$ l'insieme $\{i \in \mathbb{N}$ tali che $1 \leq i \leq n\}$ e con S_n il gruppo delle permutazioni di $\overline{n}$. Siccome ogni $\sigma \in \mathrm{S}_n$ è in particolare una $n-$upla ordinata di elementi di $\overline{n}$ non peccheremo di originalità nell'uso della notazione classica $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ oppure $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Denoteremo con S'_{n+1} il sottogruppo di S_{n+1} costituito dalle permutazioni di $\overline{n+1}$ che fissano $n+1$, ed identificheremo nel modo ovvio S'_{n+1} con S_n.

Useremo anche il gruppo moltiplicativo con due elementi $\{1, -1\}$.

Se $a \neq b \in \overline{n}$ indicheremo con il simbolo h^a_b la permutazione che scambia tra loro a con b e lascia invariati tutti gli altri elementi. Ovviamente $h^a_b = h^b_a$ e $h^a_b \circ h^a_b = \mathrm{id}$. Le permutazioni di questo tipo si chiamano *cicli*.

Notiamo che ogni elemento $\sigma \in \mathrm{S}_{n+1} - \mathrm{S}'_{n+1}$ può essere scritto in modo unico come $\sigma = h^{n+1}_a \circ (h^{n+1}_a \circ \sigma)$, dove $a = \sigma_{n+1}$ e $h^{n+1}_a \circ \sigma \in \mathrm{S}'_{n+1}$, dal che si deduce facilmente per ricorsività che ogni permutazione può essere ottenuta come composizione di una famiglia finita di cicli.

Proposizione 1. *Per ogni $a \in \overline{n}$ e ogni $\sigma' \in \mathrm{S}'_{n+1}$, $h^{n+1}_{\sigma'(a)} \circ \sigma' = \sigma' \circ h^{n+1}_a$.*

Dimostrazione. Bisogna verificare che $h^{n+1}_{\sigma'(a)} \circ \sigma'(x) = \sigma' \circ h^{n+1}_a(x)$ separando i casi $x = a,\ x = n+1,\ x \notin \{a, n+1\}$. Facile. $\square$

Teorema 1. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un'unico omomorfismo di gruppi $\mathrm{sig}_n : \mathrm{S}_n \longrightarrow \{1, -1\}$ che vale -1 sui cicli.*

Inoltre $\mathrm{sig}_{n+1|\mathrm{S}_n} = \mathrm{sig}_n$.

Dimostrazione. Per induzione su n. Per $n = 0, 1,\ \mathrm{S}_n$ è il gruppo banale, ed esiste un solo omomorfismo di gruppi $\mathrm{sig} = \mathrm{sig}_n : \mathrm{S}_n \longrightarrow \{1, -1\}$. Gode della proprietà richiesta in quanto non ci sono cicli.

Supponiamo dunque $n \geq 1$ e che il teorema sia vero per n e dimostriamolo per $n+1$. Cominciamo con il provare l'unicità: siano $\mathrm{sig}_{n+1}, \psi_{n+1} : \mathrm{S}_{n+1} \longrightarrow \{1, -1\}$ funzioni che soddisfano le proprietà richieste. Per ogni $\sigma \in \mathrm{S}_{n+1}$ si danno due possibilità

- $\sigma \in \mathrm{S}'_{n+1} = \mathrm{S}_n$ e allora $\mathrm{sig}_{n+1}(\sigma) = \mathrm{sig}_n(\sigma) = \psi_n(\sigma) = \psi_{n+1}(\sigma)$ in quanto a livello n l'unicità è sicura.

- $\sigma \in \mathrm{S}_{n+1} - \mathrm{S}'_{n+1}$ e allora esistono $a \in \overline{n}$ e $\sigma' \in \mathrm{S}'_{n+1}$ tali che $\sigma = h_a^{n+1} \circ \sigma'$ e allora

  $$\mathrm{sig}_{n+1}(\sigma) = \mathrm{sig}_{n+1}(h_a^{n+1} \circ \sigma') = \mathrm{sig}_{n+1}(h_a^{n+1})\mathrm{sig}_{n+1}(\sigma') = -\mathrm{sig}_{n+1}(\sigma') =$$

  $$-\psi_{n+1}(\sigma') = \psi_{n+1}(h_a^{n+1})\psi_{n+1}(\sigma') = \psi_{n+1}(h_a^{n+1} \circ \sigma') = \psi_{n+1}(\sigma)$$

  grazie alla prima eventualità.

Per quanto riguarda l'esistenza osserviamo che siamo obbligati a definire $\mathrm{sig}_{n+1}(\sigma) = \mathrm{sig}_n(\sigma)$ quando $\sigma \in \mathrm{S}'_{n+1}$ e, se vogliamo che questa funzione sia un omomorfismo di gruppi che vale -1 sui cicli, siamo altrettanto obbligati a definire $\mathrm{sig}_{n+1}(h_a^{n+1} \circ \sigma') = -\mathrm{sig}_n(\sigma')$, per ogni $a \in \overline{n}$ e ogni $\sigma' \in \mathrm{S}'_{n+1}$. Visto che ogni elemento di S_{n+1} si scrive in modo unico così la nostra definizione è completamente forzata.

Ma naturalmente dobbiamo verificare che sig_{n+1} è un omomorfismo di gruppi che vale -1 su cicli; siamo però autorizzati a supporre che sig_n goda di queste proprietà.

Siano dunque $\sigma, \tau \in \mathrm{S}_{n+1}$ e dobbiamo controllare che $\mathrm{sig}_{n+1}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sig}_{n+1}(\sigma)\mathrm{sig}_{n+1}(\tau)$. Questo è immediato se $\sigma, \tau \in \mathrm{S}'_{n+1}$.

Se invece $\sigma \notin \mathrm{S}'_{n+1}$, cioè, posto $a = \sigma(n+1)$ abbiamo che $\sigma = h_a^{n+1} \circ \sigma'$ con $\sigma' \in \mathrm{S}'_{n+1}$ mentre $\tau \in \mathrm{S}'_{n+1}$ allora

$$\mathrm{sig}_{n+1}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sig}_{n+1}(h_a^{n+1} \circ \sigma' \circ \tau) = -\mathrm{sig}_{n+1}(\sigma' \circ \tau) =$$

$$-\mathrm{sig}_{n+1}(\sigma')\mathrm{sig}_{n+1}(\tau) = \mathrm{sig}_{n+1}(\sigma)\mathrm{sig}_{n+1}(\tau)$$

Se $\sigma \in \mathrm{S}'_{n+1}$ e $\tau \notin \mathrm{S}'_{n+1}$, cioè, posto $a = \tau(n+1)$ abbiamo che $\tau = h_a^{n+1} \circ \tau'$ con $\tau' \in \mathrm{S}'_{n+1}$, allora

$$\mathrm{sig}_{n+1}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sig}_{n+1}(\sigma \circ h_a^{n+1} \circ \tau') = \mathrm{sig}_{n+1}(h_{\sigma(a)}^{n+1} \circ \sigma \circ \tau') = -\mathrm{sig}_{n+1}(\sigma \circ \tau') =$$

$$-\mathrm{sig}_{n+1}(\sigma)\mathrm{sig}_{n+1}(\tau') = \mathrm{sig}_{n+1}(\sigma)(-\mathrm{sig}_{n+1}(\tau)) = \mathrm{sig}_{n+1}(\sigma)\mathrm{sig}_{n+1}(\tau)$$

Infine se $\sigma \notin \mathrm{S}'_{n+1}$ e $\tau \notin \mathrm{S}'_{n+1}$, cioè, posto $a = \sigma(n+1)$ abbiamo che $\sigma = h_a^{n+1} \circ \sigma'$ con $\sigma' \in \mathrm{S}'_{n+1}$ e, posto $b = \tau(n+1)$ abbiamo che $\tau = h_b^{n+1} \circ \tau'$ con $\tau' \in \mathrm{S}'_{n+1}$, allora

$$\mathrm{sig}_{n+1}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sig}_{n+1}(h_a^{n+1} \circ \sigma' \circ h_b^{n+1} \circ \tau') = \mathrm{sig}_{n+1}(h_a^{n+1} \circ h_{\sigma'(b)}^{n+1} \circ \sigma' \circ \tau')$$

a questo punto bisogna distinguere due eventualità

- $\sigma'(b) = a$, nel qual caso la catena di uguaglianze continua con

$$= \mathrm{sig}_{n+1}(\sigma' \circ \tau') = \mathrm{sig}_{n+1}(\sigma')\mathrm{sig}_{n+1}(\tau') =$$
$$(-\mathrm{sig}_{n+1}(\sigma))(-\mathrm{sig}_{n+1}(\tau)) = \mathrm{sig}_{n+1}(\sigma)\mathrm{sig}_{n+1}(\tau)$$

- $\sigma'(b) \neq a$ e allora $h_a^{n+1} \circ h_{\sigma'(b)}^{n+1} = h_{\sigma'(b)}^{n+1} \circ h_{\sigma'(b)}^{a}$, dove $h_{\sigma'(b)}^{a} \in \mathrm{S}'_{n+1}$ è un ciclo e quindi, per l'ipotesi induttiva, $\mathrm{sig}_{n+1}(h_{\sigma'(b)}^{a}) = -1$ e la catena di uguaglianze continua con

$$= \mathrm{sig}_{n+1}(h_{\sigma'(b)}^{n+1} \circ h_{\sigma'(b)}^{a} \circ \sigma' \circ \tau') = -\mathrm{sig}_{n+1}(h_{\sigma'(b)}^{a} \circ \sigma' \circ \tau') =$$
$$-(\mathrm{sig}_{n+1}(h_{\sigma'(b)}^{a})\mathrm{sig}_{n+1}(\sigma')\mathrm{sig}_{n+1}(\tau')) = \mathrm{sig}_{n+1}(\sigma')(\mathrm{sig}_{n+1}(\tau')) =$$
$$\mathrm{sig}_{n+1}(\sigma)\mathrm{sig}_{n+1}(\tau)$$

Resta da provare che $\mathrm{sig}_{n+1}(h_b^a) = -1$ per ogni $a \neq b \in \overline{n+1}$; se $n+1 \in \{a, b\}$ allora $\mathrm{sig}_{n+1}(h_b^a) = \mathrm{sig}_{n+1}(h_b^a \circ \mathrm{id}) = -\mathrm{sig}_{n+1}(\mathrm{id}) = -1$, altrimenti $h_b^a \in \mathrm{S}'_{n+1}$ e $\mathrm{sig}_{n+1}(h_b^a) = \mathrm{sig}_n(h_b^a) = -1$ per l'ipotesi induttiva. $\square$

In particolare se σ è la composizione di s cicli abbiamo che $\mathrm{sig}(\sigma) = (-1)^s$.

Definizione 1. *Siano V, W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$. Una funzione $f : V^r \longrightarrow W$ è detta* multilineare *se, per ogni $i \in \overline{r}$ e per ogni $w \in V^{r-1}$, la funzione $V \longrightarrow W$ data da $v \mapsto f(w_1, \ldots, w_{i-1}, v, w_i, \ldots, w_{r-1})$ è lineare.*

L'insieme di tutte le funzioni multilineari $f : V^r \longrightarrow W$ si indica con $\mathrm{Mult}_r(V, W)$ ed è un sottospazio vettoriale di W^{V^r}.

Definizione 2. *Una funzione multilineare $f \in \mathrm{Mult}_r(V, W)$ è detta* alternante *se per ogni $v \in V^r$ che non sia iniettiva, si ha $f(v) = 0$.*

L'insieme di tutte le funzioni multilineari alternanti $f : V^r \longrightarrow W$ si indica con $\mathrm{Alt}_r(V, W)$ ed è un sottospazio vettoriale di W^{V^r}.

È un facile esercizio controllare che, per ogni ciclo $\sigma \in \mathrm{S}_r$, per ogni $f \in \mathrm{Alt}_r(V, W)$ e per ogni $v \in V^r$, $f(v \circ \sigma) = -f(v)$, e, di conseguenza, per ogni $\sigma \in \mathrm{S}_r$, per ogni $f \in \mathrm{Alt}_r(V, W)$ e per ogni $v \in V^r$, $f(v \circ \sigma) = \mathrm{sig}(\sigma) f(v)$.

Per non farci infastidire da quisquiglie fastidiose quando saremo impegnati in conteggi di una certa raffinatezza premettiamo alcuni credibilissime osservazioni.

Lemma 1. *Siano Y, X insiemi finiti, $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ e $h : Y \longrightarrow X$ una biezione. Allora*

$$\sum_{x \in X} f(x) = \sum_{y \in Y} f \circ h(y)$$

Dimostrazione. Ricordiamo brevemente che, dopo aver definito per ricorsività la somma delle $n-$uple ordinate in $\mathbb{K}^n$ decidendo che $\sum_{i=1}^{0} x_i = 0$ e $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1}$, $\sum_{x \in X} f(x)$ è definito mediante la seguente procedura: se X ha n elementi, si sceglie a caso una biezione $\alpha : \overline{n} \longrightarrow X$, si definisce $\sum_{x \in X} f(x) = \sum_{i=1}^{n} f \circ \alpha(i)$ e, utilizzando le proprietà associativa e commutativa della somma in $\mathbb{K}$, si verifica per induzione su n che la scelta di α è ininfluente.

Dopo di che il lemma si dimostra subito osservando che se $\beta : \overline{n} \longrightarrow Y$ è una biezione anche $h \circ \beta : \overline{n} \longrightarrow X$ lo è. $\square$

Lemma 2. *Siano Y, X insiemi finiti, $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ e $h : Y \longrightarrow X$ una biezione. Allora*

$$\prod_{x \in X} f(x) = \prod_{y \in Y} f \circ h(y)$$

Dimostrazione. Come quella del lemma precedente cambiando 0 in 1 e somma in prodotto. $\square$

Lemma 3. *Siano X un insieme finito, $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ una funzione, r un numero naturale positivo e $U_1, \ldots, U_r$ una partizione di X. Allora*

$$\sum_{x \in X} f(x) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{x \in U_i} f(x)$$

Dimostrazione. Per induzione su r. $\square$

Teorema 2. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e $\mathcal{B}$ una sua base. Esiste un'unica* $\det_{\mathcal{B}} \in \mathrm{Alt}(V^n, \mathbb{K})$ *tale che* $\det_{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n) = 1$.

Dimostrazione. Supponiamo che $\phi \in \mathrm{Alt}(V^n, \mathbb{K})$ e che $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$. Per ogni $j \in \overline{n}$ possiamo scrivere in modo unico $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i$, di conseguenza

$$\phi(v_1, \ldots, v_n) = \phi(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} b_{i_1}, \ldots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n} b_{i_n})$$

che, per multilinearità, possiamo scrivere come

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^n a_{i_1 1} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n} \phi(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n})$$

Naturalmente $(i_1, \ldots, i_n) \in \overline{n}^n$ e se non è iniettiva, cioè $\notin \mathrm{S}_n$, $\phi(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}) = 0$. Se invece $\sigma = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathrm{S}_n$ allora $\phi(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}) = \mathrm{sig}(\sigma)\phi(b_1, \ldots, b_n)$.

Abbiamo appurato che, per ogni $\phi \in \mathrm{Alt}(V^n, \mathbb{K})$ e per ogni $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$

$$\phi(v_1, \ldots, v_n) = (\sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \mathrm{sig}(\sigma) \prod_{t \in \overline{n}} a_{\sigma_t t}) \phi(b_1, \ldots, b_n) \tag{1}$$

In definitiva l'unico candidato che possiamo presentare per risolvere quanto richiesto dall'enunciato è

$$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n) = \textstyle\sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \mathrm{sig}(\sigma) \prod_{t \in \overline{n}} a_{\sigma_t t}$$

Dobbiamo verificare che è multilineare. Prendiamo $j \in \overline{n}$, $(v_1, \ldots, v_n)$, $w_j = \sum_{i=1}^n y_{ij} b_i$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e definiamo

$$b_{ik} = \begin{cases} a_{ik} & \text{se} \quad k \neq j \\ \lambda a_{ij} + \mu y_{ij} & \text{se} \quad k = j \end{cases}$$

di modo che

$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, \lambda v_j + \mu w_j, \ldots, v_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \mathrm{sig}(\sigma) \prod_{t \in \overline{n}} b_{\sigma_t t} =$
$\sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \mathrm{sig}(\sigma)(\lambda a_{\sigma_j j} + \mu y_{\sigma_j j}) \prod_{t \in \overline{n} - \{j\}} a_{\sigma_t t} =$
$\lambda \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \mathrm{sig}(\sigma) a_{\sigma_j j} \prod_{t \in \overline{n} - \{j\}} a_{\sigma_t t} + \mu \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \mathrm{sig}(\sigma) \mu y_{\sigma_j j} \prod_{t \in \overline{n} - \{j\}} a_{\sigma_t t} =$
$\lambda \det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_n) + \mu \det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, w_j, \ldots, v_n)$.

Adesso l'alternanza; dobbiamo verificare che, se esistono $k < j$ tale che $v_k = v_j$, allora $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = 0$. L'ipotesi significa che, per ogni $i \in \overline{n}$, $a_{ik} = a_{ij}$.

$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \mathrm{sig}(\sigma) \prod_{t \in \overline{n}} a_{\sigma_t t}$

Per approfittare della nostra ipotesi conviene usare il lemma 3 con $X = \mathrm{S}_n$, $f(\sigma) = \mathrm{sig}(\sigma) \prod_{t \in \overline{n}} a_{\sigma_t t}$, $r = 2$, $U_1 = \{\sigma \in \mathrm{S}_n \text{ tali che } \sigma_k < \sigma_j\}$ e $U_2 = \{\sigma \in \mathrm{S}_n \text{ tali che } \sigma_k > \sigma_j\}$ per ottenere che

$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = \sum_{\sigma \in U_1} f(\sigma) + \sum_{\sigma \in U_2} f(\sigma)$

Adesso usiamo il lemma 1 con $Y = U_1$, $X = U_2$, $h(\sigma) = \sigma \circ h_j^k$, $f(\sigma) = \mathrm{sig}(\sigma) \prod_{t=1}^n a_{\sigma_t t}$ dopo aver verificato, come è banale, che h è davvero una biezione (con inversa data da $h^{-1}(\tau) = \tau \circ h_j^k$). Con questa nuova notazione abbiamo che

$\det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_j, \ldots, v_n) = \sum_{\sigma \in U_1} f(\sigma) + \sum_{\sigma \in U_1} f \circ h(\sigma)$

Se riusciamo a verificare che, per ogni $\sigma \in U_1$, $f(\sigma) + f(h(\sigma)) = 0$ abbiamo vinto.

Intanto osserviamo che $\mathrm{sig}(h(\sigma)) = \mathrm{sig}(\sigma \circ h_j^k) = -\mathrm{sig}(\sigma)$ perché h_j^k è un ciclo, inoltre, per definizione di h abbiamo che

$$h(\sigma)_t = \begin{cases} \sigma_j & \text{se} \quad t = k \\ \sigma_k & \text{se} \quad t = j \\ \sigma_t & \text{se} \quad t \notin \{k, j\} \end{cases}$$

e allora, per ogni $\sigma \in U_1$, anzi, per ogni $\sigma \in \mathrm{S}_n$,

$$\begin{gathered} f(\sigma) + f(h(\sigma)) = \mathrm{sig}(\sigma) \prod_{t=1}^n a_{\sigma_t t} + \mathrm{sig}(h(\sigma)) \prod_{t=1}^n a_{h(\sigma)_t t} = \\ \mathrm{sig}(\sigma)(\prod_{t=1}^n a_{\sigma_t t} - \prod_{t=1}^n a_{h(\sigma)_t t}) = \\ \mathrm{sig}(\sigma)(a_{\sigma_k k} \cdot a_{\sigma_j j} \cdot \prod_{t \notin \{k,j\}} a_{\sigma_t t} - a_{\sigma_j k} \cdot a_{\sigma_k j} \cdot \prod_{t \notin \{k,j\}} a_{\sigma_t t}) = 0 \end{gathered}$$

esattamente perché

$$a_{\sigma_k k} = a_{\sigma_k j} \text{ e } a_{\sigma_j j} = a_{\sigma_j k}$$

Infine si tratta di controllare che $\det_{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n) = 1$. Per calcolare $\det_{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n)$ dobbiamo prendere $a_{ij} = 1$ se $i = j$ e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Per ogni $\sigma \in \mathrm{S}_n$ che non sia l'identità abbiamo che esiste $t \in \overline{n}$ tale che $\sigma_t \neq t$ e quindi $a_{\sigma_t t} = 0$ e allora $\prod_{s \in \overline{n}} a_{\sigma_s s} = 0$ e quindi $\det_{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n) = \prod_{s \in \overline{n}} a_{ss} = 1$ e la dimostrazione è conclusa. $\square$

Usando l'equazione 1 abbiamo il

Corollario 1. *Lo spazio vettoriale* $\mathrm{Alt}(V^n, \mathbb{K})$ *ha dimensione* 1*. Per ogni base* $\mathcal{B}$ *di* V, $\det_{\mathcal{B}}$ *ne è base.*

In particolare, prendendo $V = \mathcal{M}(n \times 1, \mathbb{K})$, $\mathcal{B} = \mathcal{E}$, la sua base canonica, ed identificando una matrice $A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{K})$ con la $n-$upla ordinata $(A^1, \ldots, A^n) \in V^n$ costituita dai suoi vettori colonna abbiamo il

Teorema 3. *Per ogni numero naturale positivo n esiste un'unica funzione* $\det : \mathcal{M}(n \times n) \longrightarrow \mathbb{K}$ *multilineare ed alternante sulle colonne tale che* $\det(I) = 1$. *Essa è definita da* $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \mathrm{sig}(\sigma) \prod_{t \in \overline{n}} a_{\sigma_t t}$.

Questa funzione ha due importanti proprietà che verranno illustrate nelle proposizioni che seguono

Proposizione 2. *Per ogni* $A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{K})$ *abbiamo che* $\det(A) = \det(A^t)$. *In particolare* $\det$ *è multilineare ed alternante anche sulle righe.*

Dimostrazione. Per ogni $\sigma \in \mathrm{S}_n$ applichiamo il lemma 2 con $X = Y = \overline{n}$, $h = \sigma^{-1}$, $f(t) = a_{\sigma_t t}$ per ottenere che

$$\prod_{s \in \overline{n}} a_{\sigma_s s} = \prod_{s \in \overline{n}} f(s) = \prod_{t \in \overline{n}} f(h(t)) = \prod_{t \in \overline{n}} a_{\sigma_{h(t)} h(t)} = \prod_{t \in \overline{n}} a_{t \sigma^{-1}(t)}$$

Adesso applichiamo il lemma 1 con $X = Y = \mathrm{S}_n$, $h(\sigma) = \sigma^{-1}$, $f(\sigma) = \mathrm{sig}(\sigma) \prod_{s \in \overline{n}} a_{\sigma_s s}$ e teniamo conto del fatto che $\mathrm{sig}(\tau) = \mathrm{sig}(\tau^{-1})$ per ottenere che

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \mathrm{sig}(\sigma) \prod_{s \in \overline{n}} a_{\sigma_s s} =$$

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} f(\sigma) = \sum_{\tau \in \mathrm{S}_n} f \circ h(\tau) = \sum_{\tau \in \mathrm{S}_n} f(\tau^{-1}) = \sum_{\tau \in \mathrm{S}_n} \mathrm{sig}(\tau^{-1}) \prod_{t \in \overline{n}} a_{\tau_t^{-1} t} =$$

$$\sum_{\tau \in \mathrm{S}_n} \mathrm{sig}(\tau^{-1}) \prod_{t \in \overline{n}} a^t_{t \tau_t^{-1}} = \sum_{\tau \in \mathrm{S}_n} \mathrm{sig}(\tau^{-1}) \prod_{s \in \overline{n}} a^t_{\tau_s s} =$$

$$\sum_{\tau \in \mathrm{S}_n} \mathrm{sig}(\tau) \prod_{s \in \overline{n}} a^t_{\tau_s s} = \det(A^t)$$

e la dimostrazione è conclusa. □

Naturalmente questo ci autorizza, se lo desideriamo, a calcolare $\det(A)$ come $\sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \mathrm{sig}(\sigma) \prod_{s \in \overline{n}} a_{s \sigma_s}$

Proposizione 3 (Formula di Binet)**.** *Per ogni* $A, B \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{K})$ *abbiamo che* $\det(BA) = \det(B)\det(A)$.

Dimostrazione. Prendiamo a nostro piacere uno spazio vettoriale V di dimensione n ed una sua base $\mathcal{B}$ e sia $T \in \mathrm{Hom}(V, V)$ l'unica applicazione lineare tale che $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(T) = B$. È facilissimo dimostrare che la funzione $\phi : V^n \longrightarrow \mathbb{K}$ definita da $\phi(v_1, \ldots, v_n) = \det_{\mathcal{B}}(T(v_1), \ldots, T(v_n))$ è multilineare ed alternante. Grazie al corollario 1 esiste $\alpha \in \mathbb{K}$ tale che $\phi = \alpha \det_{\mathcal{B}}$. Per calcolare α basta osservare che

$$\alpha = \alpha \det_{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n) = \phi(b_1, \ldots, b_n) = \det_{\mathcal{B}}(T(b_1), \ldots, T(b_n)) = \\ \det(B) \det_{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_n) = \det(B)$$

Se prendiamo, per ogni $j \in \overline{n}$, $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} b_i$ avremo che

$$T(v_j) = T(\sum_{i=1}^n a_{ij} b_i) = \sum_{i=1}^n a_{ij} T(b_i) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \sum_{s=1}^n b_{si} b_s = \\ \sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^n b_{si} a_{ij} b_s = \sum_{s=1}^n (ba)_{sj} b_s$$

e quindi $\phi(v_1, \ldots, v_n) = \det(BA)$.

D'altra parte $\phi(v_1, \ldots, v_n) = \det(B) \det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n) = \det(B) \det(A)$ e la dimostrazione è conclusa. $\square$

Esiste un utile metodo ricorsivo per calcolare $\det(A)$, detto *sviluppo di Laplace* che ora descriveremo: scegliamo arbitrariamente $j \in \overline{n}$, per ogni $i \in \overline{n}$ chiamiamo *minore* $ij-$*esimo* di A la matrice

$$A^{ij} \in \mathcal{M}((n-1) \times (n-1), \mathbb{K})$$

che si ottiene da A eliminando la riga i e la colonna j (è chiaro che questa definizione, per quanto visivamente illuminante, avrà bisogno di una descrizione più rigorosa).

Proposizione 4. *Per ogni intero positivo $n \geq 2$, e per ogni $A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{K})$ abbiamo che, per ogni $j \in \overline{n}$,*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A^{ij}$$

Dimostrazione. Fissiamo $j \in \overline{n}$; abbiamo che

$$\det(A) = \sum_{\tau \in \mathrm{S}_n} \mathrm{sig}(\tau) \prod_{t \in \overline{n}} a_{\tau_t t} = \sum_{\tau \in \mathrm{S}_n} \mathrm{sig}(\tau) a_{\tau_j j} \prod_{t \in \overline{n} - \{j\}} a_{\tau_t t}$$

Partizioniamo S_n come $\mathrm{S}_n = \bigcup_{i \in \overline{n}} \mathrm{S}_n^{ij}$ dove $\mathrm{S}_n^{ij} = \{\tau \in \mathrm{S}_n \text{ tali che } \tau_j = i\}$. Usando il lemma 3 abbiamo che

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{\tau \in \mathrm{S}_n^{ij}} \mathrm{sig}(\tau)\, a_{ij} \prod_{t \in \overline{n} - \{j\}} a_{\tau_t t}$$

Naturalmente è nostra intenzione provare che, per ogni $i \in \overline{n}$,

$$(-1)^{i+j} \det A^{ij} = \sum_{\tau \in \mathrm{S}_n^{ij}} \mathrm{sig}(\tau) \prod_{t \in \overline{n} - \{j\}} a_{\tau_t t} \tag{2}$$

Non possiamo rimandare oltre una descrizione rigorosa del minore A^{ij}.

Per ogni $k \in \overline{n}$ definiamo la biezione $\alpha_k : \overline{n-1} \longrightarrow \overline{n} - \{k\}$ mediante

$$\alpha_k(s) = \begin{cases} s & \text{se} \quad s < k \\ s+1 & \text{se} \quad s \geq k \end{cases}$$

e definiamo la biezione $\phi : \overline{n-1} \times \overline{n-1} \longrightarrow (\overline{n} - \{i\}) \times (\overline{n} - \{j\})$ mediante $\phi(t,s) = (\alpha_i(t), \alpha_j(s))$, di modo che $a^{ij}_{ts} = a_{\phi(t,s)}$ e per la nuda e cruda definizione di determinante

$$\det(A^{ij}) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_{n-1}} \mathrm{sig}(\sigma) \prod_{s \in \overline{n-1}} a_{\phi(\sigma(s)s))}$$

e l'equazione 2 diventa

$$(-1)^{i+j} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_{n-1}} \mathrm{sig}(\sigma) \prod_{s \in \overline{n-1}} a_{\phi(\sigma(s),s)} = \sum_{\tau \in \mathrm{S}^{ij}_n} \mathrm{sig}(\tau) \prod_{t \in \overline{n} - \{j\}} a_{\tau_t t} \tag{3}$$

Cioè

$$(-1)^{i+j} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_{n-1}} \mathrm{sig}(\sigma) \prod_{s \in \overline{n-1}} a_{(\alpha_i \circ \sigma(s), \alpha_j(s))} = \sum_{\tau \in \mathrm{S}^{ij}_n} \mathrm{sig}(\tau) \prod_{t \in \overline{n} - \{j\}} a_{\tau_t t} \tag{4}$$

Per ogni $\tau \in \mathrm{S}^{ij}_n$, usando il lemma 2 con $Y = \overline{n-1}$, $X = \overline{n} - \{j\}$, $f(t) = \prod_{t \in \overline{n} - \{j\}} a_{\tau_t t}$ e $h = \alpha_j$ abbiamo che $\prod_{t \in \overline{n} - \{j\}} a_{\tau_t t} = \prod_{s \in \overline{n-1}} a_{(\tau \circ \alpha_j(s), \alpha_j(s))}$ e l'equazione da verificare diventa

$$(-1)^{i+j} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_{n-1}} \mathrm{sig}(\sigma) \prod_{s \in \overline{n-1}} a_{(\alpha_i \circ \sigma(s), \alpha_j(s))} = \sum_{\tau \in \mathrm{S}^{ij}_n} \mathrm{sig}(\tau) \prod_{s \in \overline{n-1}} a_{(\tau \circ \alpha_j(s), \alpha_j(s))} \tag{5}$$

Adesso definiamo una biezione $\psi : \mathrm{S}_{n-1} \longrightarrow \mathrm{S}^{ij}_n$ mediante

$$\psi(\sigma)(t) = \begin{cases} i & \text{se} \quad t = j \\ \alpha_i \circ \sigma \circ \alpha_j^{-1}(t) & \text{se} \quad t \neq j \end{cases}$$

di modo che il diagramma

$$\begin{array}{lcl} \overline{n-1} & \xrightarrow{\alpha_j} & \overline{n} - \{j\} \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \psi(\sigma) \\ \overline{n} & \xrightarrow{\alpha_i} & \overline{n} - \{i\} \end{array}$$

commuti ed applichiamo il lemma 1 con $X = \mathrm{S}_n^{ij}$, $Y = \mathrm{S}_{n-1}$, $f(\tau) = \mathrm{sig}(\tau) \prod_{s \in \overline{n-1}} a_{(\tau\circ\alpha_j(s),\alpha_j(s))}$ e $h = \psi$ per ottenere

$$\sum_{\tau \in \mathrm{S}_n^{ij}} \mathrm{sig}(\tau) \prod_{s\in\overline{n-1}} a_{(\tau\circ\alpha_j(s),\alpha_j(s))} = \sum_{\tau\in\mathrm{S}_n^{ij}} f(\tau) = \sum_{\sigma\in\mathrm{S}_{n-1}} f(\psi(\sigma)) =$$

$$\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_{n-1}} \mathrm{sig}(\psi(\sigma)) \prod_{s\in\overline{n-1}} a_{(\psi(\sigma)\circ\alpha_j(s),\alpha_j(s))} = \sum_{\sigma\in\mathrm{S}_{n-1}} \mathrm{sig}(\psi(\sigma)) \prod_{s\in\overline{n-1}} a_{(\alpha_i\circ\sigma(s),\alpha_j(s))} \quad (6)$$

Adesso ci rimane solo da verificare che $(-1)^{i+j}\mathrm{sig}(\sigma) = \mathrm{sig}(\psi(\sigma))$.

Allo scopo, per ogni $k \in \overline{n}$ definiamo $\alpha'_k \in \mathrm{S}_n$ estendendo α_k nell'unico modo possibile, cioè

$$\alpha'_k(t) = \begin{cases} \alpha_k(t) & \text{se} \quad t < n \\ k & \text{se} \quad t = n \end{cases}$$

Notiamo che $\alpha'_k = h_{k+1}^k \circ \ldots \circ h_n^{n-1}$ per cui $\mathrm{sig}(\alpha'_k) = (-1)^{n-k}$.

Per ogni $\sigma \in \mathrm{S}_{n-1}$ chiamiamo σ' l'unica sua estensione a $\overline{n}$, cioè

$$\sigma'(t) = \begin{cases} \sigma(t) & \text{se} \quad t < n \\ n & \text{se} \quad t = n \end{cases}$$

È facile verificare che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \overline{n} & \xrightarrow{\alpha'_j} & \overline{n} \\ \downarrow \sigma' & & \downarrow \psi(\sigma) \\ \overline{n} & \xrightarrow{\alpha'_i} & \overline{n} \end{array}$$

commuta, per cui $\mathrm{sig}(\alpha'_i)\mathrm{sig}(\sigma') = \mathrm{sig}(\psi(\sigma))\mathrm{sig}(\alpha'_j)$, quindi abbiamo che

$$(-1)^{n-i}\mathrm{sig}(\sigma') = \mathrm{sig}(\psi(\sigma))(-1)^{n-j}$$

Visto che, per il teorema 1, $\mathrm{sig}(\sigma) = \mathrm{sig}(\sigma')$, la dimostrazione conclusa. $\square$