Geometria 1-Esercizi di esame
C.d.L. Matematica, Fisica – A.A. 2008/09

• *Domanda* 1. Sia $(v_1,\ v_2,\ v_3)$ una terna di vettori linearmenti indipendenti di $\mathbb{R}^5$ e $\{b_1, b_2\} \subseteq \mathbb{R}^5$. Allora:
1) Tutte le altre risposte sono sbagliate.
2) Se $b_1 \neq \alpha b_2$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e né b_1 né b_2 appartengono a $\mathcal{L}(v_1,\ v_2,\ v_3)$, allora $(b_1, b_2, v_1,\ v_2,\ v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^5$.
3) Se (b_1, b_2) è una coppia linearmente indipendente di $\mathbb{R}^5$, allora $(b_1, b_2, v_1,\ v_2,\ v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^5$.
4) Se $\mathcal{L}(b_1, b_2)$ non è un sottospazio di $\mathcal{L}(v_1,\ v_2,\ v_3)$, allora $(b_1, b_2, v_1,\ v_2,\ v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^5$.

Soluzione. Sia $\mathcal{E}$ la base standard di $\mathbb{R}^5$; poniamo $v_1 = e_3$, $v_2 = e_4$, $v_3 = e_5$, $b_1 = e_1 + e_3$, $b_2 = e_1 + e_4$. Abbiamo allora

$$b_1 - b_2 - v_1 + v_2 = 0$$

e i vettori $b_1, b_2, v_1,\ v_2,\ v_3$ risultano linearmente dipendenti; dunque $(b_1, b_2, v_1,\ v_2,\ v_3)$ non è una base di $\mathbb{R}^5$, pur essendo le ipotesi dei punti 2, 3, 4 tutte soddisfatte. E allora la risposta giusta è la 1. □

• *Domanda* 2. Sia $A \in \mathcal{M}(6 \times 7; \mathbb{R})$ e $b \in \mathcal{M}(6 \times 1; \mathbb{R})$.
1) Se $b = 0$, allora $\mathrm{Sol}(A, b) \triangleleft \mathcal{M}(7 \times 1; \mathbb{R})$.
2) $\mathrm{Sol}(A, b) \neq \emptyset$ se e solo se $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) = 6$.
3) Se $X \in \mathrm{Sol}(A, b)$, esiste $Y \in \mathrm{Sol}(A, 0)$ tale che $X = Y + b$.
4) $\mathrm{Sol}(A, b) \triangleleft \mathbb{R}^6$.

Soluzione. È ben noto dalla teoria che l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo è un sottospazio vettoriale, quindi la risposta giusta è la 1.

Se A e b sono entrambi matrici nulle allora $\mathrm{Sol}(A, b) = \mathcal{M}(7 \times 1; \mathbb{R}) \neq \emptyset$, mentre $\mathrm{rg}(A) = 0 \neq 6$. Quindi la 2 è sbagliata.

La 3 è una sciocchezza inaudita, $Y + b$ non ha senso.

Anche la 4 è una cretinata, se $\mathrm{Sol}(A, b) \neq \emptyset$ non è nemmeno un sottoinsieme di $\mathbb{R}^6$. □

• *Domanda* 3. Sia T un operatore di $\mathbb{R}^n$ e $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ l'insieme dei suoi autovalori.
1) Se λ_1, λ_2 e λ_3 sono tra loro differenti e $n = 3$, allora T è diagonalizzabile.
2) T è diagonalizzabile se e solo se $\mathrm{m.a.}(\lambda_i) = \mathrm{m.g.}(\lambda_i)$ per ogni $i \in \{1, 2, 3\}$.
3) T è diagonalizzabile se e solo se $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \mathrm{m.a.}(\lambda_i) = n$.
4) T è diagonalizzabile se e solo se $n = 3$.

Soluzione. È ben noto dalla teoria un operatore su uno spazio vettoriale di dimensione n che abbia n autovalori è diagonalizzabile, quindi la risposta giusta è la 1.

L'operatore T su $\mathbb{R}^5$ associato alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ha polinomio caratteristico $P_T(t) = t(t-1)(t-2)(t^2+1)$ e allora $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \mathrm{m.a.}(\lambda_i) = 3 < 5$, e dunque T non è diagonalizzabile, pur essendo le premesse soddisfatte. Quindi la 2 è sbagliata.

L'operatore su T su $\mathbb{R}^4$ associato alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ha polinomio caratteristico $P_T(t) = t(t-1)^2(t-2)$ e allora $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \mathrm{m.a.}(\lambda_i) = 4$, ma T non è diagonalizzabile, perché $\mathrm{m.a.}(1) = 2 > 1 = \mathrm{m.g.}(1)$. Quindi la 3 è sbagliata.

L'operatore su T su $\mathbb{R}^4$ associato alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile. Quindi la 4 è sbagliata. $\square$

• *Domanda* 4. Sia f una forma bilineare simmetrica di uno spazio vettoriale V e $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ una base f-adattata di V.
1) Se $\mathcal{C}$ è una base di V, allora $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f)$ è simmetrica.
2) Se $\mathcal{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ è una base f-adattata di V, allora $c_i = \dfrac{b_i}{\sqrt{f(b_i, b_i)}}$ per ogni $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
3) Se $n > 1$, allora $f(b_1, b_1) \neq 0$.
4) Se $c_i = ib_i$ per ogni $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, allora $\mathcal{C} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ è una base f-adattata di V.

Soluzione. È ben noto dalla teoria che ogni matrice associata ad una forma bilineare simmetrica è simmetrica, quindi la risposta giusta è la 1.

Sia f il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^2$. La base standard $\mathcal{E}$ è $f-$adattata, ma anche la base (c_1, c_2) data da $c_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $c_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ è $f-$adattata. Quindi la 2 è sbagliata.

La 3 è sbagliata, basta prendere la forma bilineare nulla su $\mathbb{R}^2$.

La 4 è sbagliata perché, se $f(b_2, b_2) \neq 0$, allora $f(c_2, c_2) = f(2b_2, 2b_2) = 4f(b_2, b_2) \notin \{0, 1, -1\}$. $\square$

• *Domanda* 5. Sia T un operatore non suriettivo di uno spazio vettoriale finitamente generato V. È vero che:
1) Esiste un vettore non nullo $v \in V$ tale che $T(v) = 0$.
2) Esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(T)$ ha determinante diverso da zero.
3) Se λ è un autovalore di T, allora $\lambda \neq 0$.
4) Esistono due vettori v e w linearmente indipendenti tali che $T(v) = T(w) = 0$.

Soluzione. La risposta giusta è la 1 in quanto un operatore non suriettivo non è nemmeno iniettivo e quindi $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$.

Dire che T non è suriettivo significa esattamente che $\mathrm{rg}(T) < \dim(V)$, quindi $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(T)$ non ha rango massimo ed il suo determinante è nullo. E allora la 2 è sbagliata.

La 3 è sbagliata in quanto un operatore non suriettivo non è nemmeno iniettivo e quindi $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0\}$ il che significa esattamente che 0 è autovalore di T.

La 4 è sbagliata, infatti per l'operatore su T su $\mathbb{R}^2$ associato alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ abbiamo $\mathrm{Ker}(T) = \mathcal{L}(1, 0)$. $\square$

• *Domanda* 6. Siano U e V due sottospazi di $\mathbb{R}^6$ tali che $\dim(U) = 2 \cdot \dim(V)$. È vero che:
1) Se $\dim(V) = 3$ allora V è un sottospazio di U.
2) Se $V \lhd U$ allora $\dim(V) \leq 2$.
3) $V \lhd U$ se e solo se $\dim(V) \leq 3$.
4) Se $U \cap V = \{0\}$ allora $U \oplus V = \mathbb{R}^6$.

Soluzione. La risposta giusta è la 1 in quanto, se $\dim(V) = 3$, allora $\dim(U) = 6$ e quindi $U = \mathbb{R}^6$ e allora $V \lhd \mathbb{R}^6 = U$.

Sia $\mathcal{E}$ la base standard di $\mathbb{R}^6$, $V = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3)$, $U = \mathbb{R}^6$. Allora $V \lhd U$, $\dim V = 3$ e la 2 è sbagliata.

Prendiamo $V = \mathcal{L}(e_1)$, $U = \mathcal{L}(e_2, e_3)$ allora $\dim(V) = 1 \leq 3$ ma V non è un sottospazio di U e la 3 è sbagliata.

La 4 è sbagliata, basta prendere l'esempio appena fornito. $\square$

• *Domanda* 7. Sia f una forma bilineare di $\mathbb{R}^5$ di rango 4. Allora:
1) f non è un prodotto scalare.
2) f è semidefinita positiva.
3) Se f ha segnatura (p, q), allora $p = 4$ e $q = 0$.
4) f non è diagonalizzabile.

Soluzione. La risposta giusta è la 1 in quanto, se f è un prodotto scalare, allora $\mathrm{sgn}(f) = (5, 0)$ e quindi $\mathrm{rg}(f) = 5 + 0 = 5$.

Sia f la forma bilineare associata alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Allora $\mathrm{sgn}(f) = (3, 1)$ e quindi f non è semidefinita positiva mentre $\mathrm{rg}(f) = 3 + 1 = 4$ e la 2 è sbagliata.

Lo stesso esempio demolisce anche la 3 e la 4. $\square$

• *Domanda* 8. Sia f il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^5$ e T un operatore di $\mathbb{R}^5$ tale che $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$. È vero che:
1) Se $\mathrm{Im}(T) \cap \mathrm{Ker}(T) = \{0\}$, allora $(\mathrm{Im}(T) + \mathrm{Ker}(T))^{\perp} = \{0\}$.
2) $\mathrm{Im}(T)^{\perp} + \mathrm{Ker}(T)^{\perp} = \mathbb{R}^5$.
3) $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Ker}(T)^{\perp}$.
4) $(\mathrm{Im}(T) + \mathrm{Ker}(T))^{\perp} = \{0\}$.

Soluzione. La risposta giusta è la 1. Dal teorema nullità +rango si ha che $\dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = 5$. Usando la formula di Grassmann si trova subito che $\dim(\mathrm{Im}(T) + \mathrm{Ker}(T)) = 5$, e quindi $\mathrm{Im}(T) + \mathrm{Ker}(T) = \mathbb{R}^5$ e allora $(\mathrm{Im}(T) + \mathrm{Ker}(T))^{\perp} = (\mathbb{R}^5)^{\perp} = \{0\}$.

Si noti che l'ipotesi $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$ è del tutto ridondante.

Sia T l'operatore associata alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Allora $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3)$ e $\mathrm{Ker}(T) = \mathcal{L}(e_1, e_2)$, da cui segue subito che $\mathrm{Im}(T)^{\perp} = \mathcal{L}(e_4, e_5)$ e $\mathrm{Ker}(T)^{\perp} = \mathcal{L}(e_3, e_4, e_5)$; ma allora $\mathrm{Im}(T)^{\perp} + \mathrm{Ker}(T)^{\perp} = \mathcal{L}(e_3, e_4, e_5) \neq \mathbb{R}^5$ e la 2 è sbagliata.

Lo stesso esempio demolisce anche la 3 e la 4, in quanto $\mathrm{Im}(T) + \mathrm{Ker}(T) = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3)$. $\square$

• *Domanda* 9. Siano $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ e $B \in \mathcal{M}(n \times n; \mathbb{R})$. Allora:
1) Esiste una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori dell'operatore associato a $B^t B$.
2) $B^t B$ è invertibile.
3) Se l'operatore di $\mathbb{R}^n$ associato a B è diagonalizzabile, allora $B^t B$ è invertibile.
4) $B^t B$ è una matrice diagonale.

Soluzione. La risposta giusta è la 1. Equipaggiamo $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare standard e sia T l'operatore associato a $B^t B$, allora $(B^t B)^t = B^t B^{tt} = B^t B$; siccome la base standard è ortonormale e la matrice di T è simmetrica, abbiamo che T è un operatore simmetrico. Per il teorema spettrale esiste una base (ortonormale, ma questo non importa) formata da autovettori di T.

Prendendo per B la matrice nulla si demoliscono la 2 e la 3.

Prendendo $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ si ha che $B^t B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ che non è diagonale e la 4 è sbagliata. $\square$

• *Domanda* 10. Siano T un operatore di $\mathbb{R}^3$ e $\{v_1, v_2, v_3\}$ un insieme di autovettori di T.
1) Se $\dim(\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)) = 3$, allora T è diagonalizzabile.
2) T è diagonalizzabile se e solo se ha tre autovalori distinti.
3) Se v_1, v_2 e v_3 sono autovettori relativi allo stesso autovalore λ di molteplicità algebrica 3, allora T è diagonalizzabile.
4) Se $\dim(\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)) < 3$, allora T non è diagonalizzabile.

Soluzione. L'ipotesi $\dim(\mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)) = 3$ significa esattamente che (v_1, v_2, v_3) è una base per $\mathbb{R}^3$, siccome è formata da autovettori la 1 è giusta.

La 2 è sbagliata, l'operatore nullo è diagonalizzabile, pur avendo un solo autovalore.

Prendendo $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (2, 0, 0), v_3 = (3, 0, 0)$ si demolisce la 3.

Prendendo per T l'operatore nullo ed i tre vettori $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (2,0,0), v_3 = (3,0,0)$ si vede che la 4 è sbagliata. $\square$

• *Domanda* 11. Siano $\{n,m\} \subseteq \mathbb{N}$, V e W due spazi vettoriali con $\dim(V) = n$ e $\dim(W) = m$. Siano inoltre $T \in \mathrm{Hom}(V,W)$ e A la matrice associata a T rispetto ad opportune basi di V e W.
1) Se T è suriettivo, allora $\mathrm{rg}(A) = \min\{n,m\}$.
2) T è iniettivo se e solo se $\mathrm{rg}(A) = \min\{n,m\}$.
3) Se $V = W$, allora $\mathrm{rg}(A) = n$.
4) Se $\mathrm{rg}(A) < n$, allora T non è suriettiva.

Soluzione. Se T è suriettiva, certamente $m \leq n$ e allora $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(T) = m = \min\{n,m\}$ e la 1 è giusta.

Prendiamo $n = 2$, $m = 1$ e l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ data da $T(x,y) = x$. T non è iniettiva ma $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(T) = 1 = \min\{n,m\}$. La 2 è sbagliata.

L'operatore nullo su $\mathbb{R}^2$ non ha rango 2, e la 3 è sbagliata.

Prendiamo $n = 2$, $m = 1$ e l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ data da $T(x,y) = x$. T è suriettiva ma $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(T) = 1 < n$. La 4 è sbagliata. $\square$

• *Domanda* 12. Sia $\left(\mathbb{R}^7, \langle , \rangle\right)$ lo spazio euclideo con prodotto scalare standard e U e V due sottospazi di $\mathbb{R}^7$ di dimensione rispettivamente n e m. Per ogni $W \triangleleft \mathbb{R}^7$ definiamo inoltre il sottospazio $W^\perp = \left\{a \in \mathbb{R}^7 \quad \text{t.c.} \quad \langle a,w\rangle = 0 \ \forall w \in W\right\}$
1) Se $U^\perp + V^\perp = \mathbb{R}^7$, allora $n + m \leq 7$.
2) $U + V = \mathbb{R}^7$ se e solo se $n + m \geq 7$.
3) Se $U \triangleleft V$, allora $U + V \neq \mathbb{R}^7$.
4) Se $U \neq V$ e $n = m = 4$, allora $\dim\left(U^\perp \cap V^\perp\right) = 1$.

Soluzione. La formula di Grassmann applicata a $U^\perp$ e $V^\perp$ dice che

$$\dim(U^\perp + V^\perp) = 7 - n + 7 - m - \dim(U^\perp \cap V^\perp)$$

Se $U^\perp + V^\perp = \mathbb{R}^7$, con passaggi elementari si ottiene $n + m = 7 - \dim(U^\perp \cap V^\perp) \leq 7$ e la 1 è giusta.

Sia $\mathcal{E}$ la base standard di $\mathbb{R}^7$ e prendiamo $U = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_6)$ e $V = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_5)$. Allora $n+m = 11$ mentre $U + V = U \neq \mathbb{R}^7$ e la 2 è sbagliata.

Per demolire la 3 basta prendere $V = \mathbb{R}^7$.

Scegliendo $U = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_4)$ e $V = \mathcal{L}(e_4, \ldots, e_7)$ si ha che $n = m = 4$, $U^\perp = \mathcal{L}(e_5, e_6, e_7)$, $V^\perp = \mathcal{L}(e_1, e_2, e_3)$ e allora $\dim\left(U^\perp \cap V^\perp\right) = 0$ e la 4 è sbagliata. $\square$

• *Domanda* 13. Sia U un sottospazio di $\mathbb{R}^5$ con $\dim(U) \leq 2$ e siano v_1 e v_2 due vettori di $\mathbb{R}^5$ tali che $\dim\left(\mathcal{L}(v_1, v_2)\right) = 2$. Allora
1) $\{v_1, v_2\} \subseteq U$ se e solo se $U = \mathcal{L}(v_1, v_2)$.
2) Se $v_2 \in U$ allora $U = \mathcal{L}(v_1, v_2)$.
3) Se $v_1 \notin U$ allora $\dim\left(U + \mathcal{L}(v_1, v_2)\right) = 4$.
4) Se $v_1 \notin U$ allora $\dim\left(U + \mathcal{L}(v_1, v_2)\right) = 3$.

Soluzione. Se $\{v_1, v_2\} \subseteq U$ anche $\mathcal{L}(v_1, v_2) \triangleleft U$; d'altra parte non può essere $\mathcal{L}(v_1, v_2) \subsetneq U$ perché altrimenti $\dim U \geq 3$; viceversa, se $\mathcal{L}(v_1, v_2) = U$ in particolare si ha che $\{v_1, v_2\} \subseteq \mathcal{L}(v_1, v_2) \subseteq U$ e la risposta 1 è giusta.

Sia $\mathcal{E}$ la base standard di $\mathbb{R}^5$ e prendiamo $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$ e $U = \mathcal{L}(e_2, e_3)$; allora $v_2 \in U$ ma $\mathcal{L}(v_1, v_2) \neq U$ e la 2 è sbagliata.

Lo stesso esempio demolisce anche la 3.

Scegliendo $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$ e $U = \mathcal{L}(e_3, e_4)$ si demolisce la 4. $\square$

• *Domanda* 14. Sia $V = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \quad \text{t.c.} \quad x + 2y - 4z = w \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}x + y - 2z - \frac{1}{2}w = 0\right\}$. È vero che:
1) V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 3.
2) V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2.
3) V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 1.
4) V non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

Soluzione. Che V sia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ si controlla sottoponendolo alle solite verifiche. Inoltre i vettori $(0,0,1,4), (0,1,0,2), (1,0,0,1)$ stanno in V e sono linearmente indipendenti (in quanto nessuno di loro è combinazione lineare dei precedenti). Questo prova che $\dim(V) \geq 3$. Inoltre non può essere $\dim(V) = 4$ perché altrimenti $V = \mathbb{R}^4$ mentre $(1,0,0,0) \notin V$. Perciò la 1 è giusta e le altre sono sbagliate. □

• *Domanda* 15. Siano $n \in \mathbb{N}$ e A e B due matrici di $\mathcal{M}(n \times n; \mathbb{R})$. Allora:
1) Se $\dim(\mathcal{L}(A, B)) = 1$, allora $AB = BA$.
2) Se $AB = BA$, allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $A = \lambda I$ o $B = \lambda I$.
3) $AB = BA$ se e solo se $A = B^k$ per qualche $k \in \mathbb{N}$.
4) Se A e B sono linearmente indipendenti, allora $AB \neq BA$.

Soluzione. Dire che $\dim(\mathcal{L}(A, B)) = 1$ significa che una delle matrice, diciamo A, non è la matrice nulla e che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $B = \lambda A$. E allora $AB = A(\lambda A) = \lambda(AA) = (\lambda A)A = BA$, e la 1 è giusta.

La 2 è sbagliata, basta prendere $n = 2$ e $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

La 3 è sbagliata, basta prendere $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lo stesso esempio demolisce anche la 4. □

• *Domanda* 16. Siano $A \in \mathcal{M}(6 \times 7; \mathbb{R})$ e $b \in \mathcal{M}(6 \times 1; \mathbb{R})$ con $\operatorname{rg}(A|b) = 6$. Allora:
1) Il sistema $Ax = b$ può non avere soluzione.
2) Il sistema $Ax = b$ ha soluzione se e solo se $b = 0$.
3) Il sistema $Ax = b$ ha infinite soluzioni.
4) Se il sistema $Ax = b$ ha soluzione, allora $\operatorname{Sol}(A, b)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}(7 \times 1; \mathbb{R})$ di dimensione 1.

Soluzione. Prendendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ si vede che la 1 è giusta e che la 3 è sbagliata.

La stessa A e $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ci convincono che la 2 è sbagliata.

Lo stesso esempio demolisce anche la 4 in quanto il vettore colonna nullo non appartiene a $\operatorname{Sol}(A, b)$. □

• *Domanda* 17. Sia S_3 il gruppo delle permutazioni su 3 elementi ed e il suo elemento neutro. Allora:
1) In S_3 esistono 4 elementi che soddisfano l'equazione $x^2 = e$.
2) S_3 ha 3 elementi.
3) S_3 è un gruppo commutativo.
4) Se $x, y \in S_3$ e $xy = yx$, allora $x = e$ o $y = e$.

Soluzione. I quattro elementi $e = (123), (132), (321), 213)$ soddisfano quanto richiesto dalla 1.

La 2 è sbagliata perché S_3 ha 6 elementi.

La 3 è sbagliata: $(231) \circ (213) = (321)$ mentre $(213) \circ (231) = (132)$.

Anche la 4 è sbagliata, basta prendere $x = y = (213)$. □

• *Esercizio teorico* 1. Si considerino i vettori $v_1 = (1, 2, 1)$ e $v_2 = (0, 1, -1)$ di $\mathbb{R}^3$.

a) Completare la coppia (v_1, v_2) ad una base di $\mathbb{R}^3$.

b) Stabilire se esiste un operatore T di $\mathbb{R}^3$ tale che $T(v_1) = (2,0,0)$, $T(v_2) = (0,1,1)$ e $T(1,1,2) = (2,-1,-1)$. In caso positivo determinare una matrice associata a T rispetto ad apposite basi.

Soluzione. a) Basta prendere $v_3 = (0,0,1)$ per ottenere la base $\mathcal{V}$.

b) Notiamo che $(1,1,2) = v_1 - v_2$ quindi, per l'esistenza di un operatore con le caratteristiche richieste è necessario che $(2,-1,-1) = T(v_1 - v_2) = T(v_1) - T(v_2) = (2,0,0) - (0,1,1) = (2,-1,-1)$; la richiesta è dunque soddisfatta e la terza condizione segue automaticamente dalle prime due.

Ponendo $w_1 = (2,0,0)$, $w_2 = (0,1,1)$, $w_3 = (0,0,1)$ si ottiene una base $\mathcal{W}$ e l'operatore T tale che $\mathcal{M}^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ soddisfa quanto richiesto □

• *Esercizio teorico* 2. Sia V uno spazio vettoriale e U e W due sottospazi di V. Si discuta la seguente affermazione

$$U \cup W \lhd V \quad \text{se e solo se} \quad U \subseteq W \text{ oppure } W \subseteq U$$

dimostrandola se vera e fornendone un controesempio se falsa.

Soluzione. $\Leftarrow$ Se $U \subseteq W$ allora $U \cup W = W \lhd V$; se $W \subseteq U$ allora $U \cup W = U \lhd V$.
$\Rightarrow$ Se $U \not\subseteq W$ esiste $u \in U$ tale che $u \notin W$. se $W \not\subseteq U$ esiste $w \in W$ tale che $w \notin U$. Allora $u \in U \cup W$ e $w \in U \cup W$. Poniamo $v = u + w$. Allora $v \notin U$ perché altrimenti $w = v - u \in U$ e neppure $v \notin W$ perché altrimenti $u = v - w \in W$. Dunque $v \notin U \cup W$ che non è un sottospazio vettoriale di V in quanto la proprietà S2 non è soddisfatta. □

• *Esercizio* 1. Sia T l'operatore di $\mathbb{R}^4$ la cui matrice rispetto alla base standard è

$$\mathcal{M}(T) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ -8 & 0 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Allora:
1) T è diagonalizzabile e $(\ (1,2,1,-2),\ (3,5,2,-6),\ (1,3,1,-2),\ (1,1,4,-1)\ )$ è una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di T.
2) T è diagonalizzabile e $(\ (4,8,3,-8),\ (1,-1,0,-2),\ (1,3,1,-2),\ (1,1,4,-1)\ )$ è una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di T.
3) T è diagonalizzabile e $(\ (1,1,4,-1),\ (3,6,2,-6),\ (1,3,1,-2),\ (1,0,0,-2)\ )$ è una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di T.
4) $\mathcal{M}(T)$ ha rango 3, quindi T non è diagonalizzabile.

Soluzione. Sia $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & -6 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice che ha per colonne i vettori proposti nella risposta 1. Allora $\mathrm{rg}(B) = 4$, assicurandoci che la quaterna proposta è effettivamente una base ed è costituita da autovettori in quanto $\mathcal{M}(T) \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Quindi i primi tre vettori sono autovettori con autovalore 1 ed il quarto è un autovettore con autovalore 0 e la risposta 1 è giusta.

Ripetendo il giochetto con i vettori citati nella risposta 2 si vede che, pur trattandosi effettivamente autovettori, solo tre dei quattro solo linearmente indipendenti, e quindi non sono una base e la 2 è sbagliata.

Lo stesso ragionamento esclude la 3.

La 4 è sbagliata perché, pur essendo effettivamente $\mathrm{rg}(\mathcal{M}(T)) = 3$, questo non esclude affatto che l'operatore T sia diagonalizzabile. $\square$

• *Esercizio* 2. Sia f la forma bilineare di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base standard è

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & -7 \\ -7 & 10 & 10 \\ -7 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

Allora:
1) f è un prodotto scalare e $(\,(1,1,0),\ (3,2,0),\ (0,1,-1)\,)$ è una base f-adattata di $\mathbb{R}^3$.
2) f non è un prodotto scalare e $(\,(1,1,0),\ (3,2,0),\ (0,1,-1)\,)$ è una base f-adattata di $\mathbb{R}^3$.
3) f è un prodotto scalare e $(\,(0,-1,1),\ (2,2,0),\ (2,1,0)\,)$ è una base f-adattata di $\mathbb{R}^3$.
4) f non è un prodotto scalare e $(\,(0,-1,1),\ (2,2,0),\ (2,1,0)\,)$ è una base f-adattata di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione. Sia $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3) = (\,(1,1,0),\ (3,2,0),\ (0,1,-1)\,)$ Si vede facilmente che si tratta proprio di una base in quanto i primi due vettori sono linearmente indipendenti ed il terzo non è una loro combinazione lineare.

Poniamo $B = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calcolando si ottiene che $B^t A B = I$ da cui si deduce che la risposta 1 è esatta e la 2 è sbagliata.

Per escludere rapidamente la 3 e la 4 basta osservare che $(2,2,0) = 2b_1$ e $f(2b_1, 2b_1) = 4$, per cui $(2,0,0)$ non può comparire in nessuna base $f-$ adattata. $\square$

• *Esercizio* 3. Siano $\mathcal{E}$ la base standard di $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ la base di $\mathbb{R}^4$ data da $b_1 = (0,1,1,0)$, $b_2 = (1,0,1,0)$, $b_3 = (0,0,1,0)$ e $b_4 = (0,0,0,1)$. Sia inoltre T l'operatore di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$T(b_1) = (3,2,5,-1), \quad T(b_2) = (1,2,5,3), \quad T(b_3) = (0,1,3,3), \quad T(b_4) = (1,1,6,4)$$

Allora:
1) $\ker(T) = \mathcal{L}(\ (5,-2,-4,1)\ )$ e $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{L}(\ (3,2,5,-1),\ (1,2,5,3),\ (0,1,3,3)\ )$.
2) $\ker(T) = \mathcal{L}(\ (-2,5,-7,1)\ )$ e $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{L}(\ (3,2,5,-1),\ (1,2,5,3),\ (0,1,3,3)\ )$.
3) $\ker(T) = \mathcal{L}(\ (5,-2,-4,1),\ (-2,5,-7,1)\ )$ e $\mathrm{Im}(T) = \mathcal{L}(\ (1,1,2,0),\ (3,1,2,-4)\ )$.
4) Nessuna delle altre risposte è corretta.

Soluzione. Sia $A = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(T) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 3 & 6 \\ -1 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, riducendola con il metodo di Gauss si trova la matrice $A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ne segue subito che $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$ e allora $\dim(\ker(T) = 1$. Perciò la 3 è sbagliata. Abbiamo anche che $\mathrm{Sol}(A|0) = \mathrm{Sol}(A'|0) = \mathcal{L}((-2,5,-7,1)^t)$ e dunque che $\ker(T) = \mathcal{L}(-2b_1 + 5b_2 - 7b_3 + b_4) = \mathcal{L}(5,-2,-4,1)$ e allora la risposta 2 è sbagliata e la prima affermazione delle 1 è corretta.

Inoltre i vettori $(3,2,5,-1) = T(b_1)$, $(1,2,5,3) = T(b_2)$, $(0,1,3,3) = T(b_3)$ appartengono tutti a $\mathrm{Im}(T)$. Sono anche linearmente indipendenti come si vede riducendo la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Quindi la risposta 1 è corretta e la 4 è sbagliata. $\square$

• *Esercizio* 4. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e si consideri il sottospazio

$$S = \{M \in \mathcal{M}(3 \times 3; \mathbb{R}) \quad \text{t.c.} \quad AM = MA\}$$

È vero che:

1) $S = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in S$

2) $S = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ e $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in S$

3) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

4) $S = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

Soluzione. Sia $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ una generica matrice 3×3. Avremo che $M \in S$ se e solo se

$$\begin{pmatrix} a-c & b & a+c \\ d-f & e & d+f \\ g-i & h & g+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ -a+g & -b+h & -c+i \end{pmatrix}$$

Cioè le matrici che stanno in S sono quelle del tipo $\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ -c & 0 & a \end{pmatrix}$ con $a, c, e \in \mathbb{R}$.

Da qui si vede subito che la risposta 1 è corretta e che tutte le altre sono sbagliate. □

• *Esercizio* 5. Si consideri il vettore $v = (1, -6, 1, 3)^t$ e le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & k-1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & k+3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} k^2-k \\ k^2-k \\ 3k-3k^2 \\ 2k-2k^2 \end{pmatrix}$$

con $k \in \mathbb{R}$. Allora:

1) $\mathrm{Sol}(A, b) = \mathcal{L}(v)$ se e solo se $k = 1$.
2) $\mathrm{Sol}(A, 0)$ ha dimensione 1 per ogni $k \in \mathbb{R}$.
3) $\mathrm{Sol}(A, b) = \mathcal{L}(v)$ se e solo se $k \neq 4$.
4) $\mathrm{Sol}(A, b) \neq \emptyset$ se e solo se $k \in \{0, 1\}$.

Soluzione. Riducendo con il metodo di Gauss la matrice completa del sistema $(A|b)$ si trova la matrice completa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & k^2-k \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & k-4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & 2k-2k^2 \end{pmatrix}$$

Ponendo $k = 1$ si ha il sistema omogeneo la cui matrice completa è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3. Il vettore v è effettivamente soluzione di tale sistema e quindi $\mathrm{Sol}(A|b) = \mathcal{L}(v)$. Viceversa, se $\mathrm{Sol}(A|b)$ è un sottospazio vettoriale, deve essere $b = 0$ e cioè $k = 0$ o $k = 1$. Ma se $k = 0$ la matrice A ha rango 4 e quindi $\mathrm{Sol}(A.0) = \{0\}$; dunque la risposta 1 è corretta.

La risposta 2 è sbagliata perché per $k \notin \{1, 4\}$ la matrice dei coefficienti ha rango 4 e quindi il sistema omogeneo ha solamente la soluzione nulla.

La risposta 3 è sbagliata perché per $k \notin \{0, 1\}$ il sistema non è omogeneo e quindi il suo insieme delle soluzioni non è un sottospazio vettoriale.

Anche la risposta 4 è sbagliata in quanto, per ogni $k \notin \{1, 4\}$, la matrice dei coefficienti ha rango 4 e quindi il sistema ha un'unica soluzione. $\square$

- *Esercizio* 6. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y, z, w) \quad \text{t.c.} \quad x + y = 0 \text{ e } x - 2y = 0\} \\ V &= \mathcal{L}(\ (1, 2, 0, 0),\ (2, 4, 3, 5)\ ) \end{aligned}$$

E' vero che:
1) $U \cap V = \mathcal{L}(\ (0, 0, 3, 5)\ )$.
2) $U \cap V = \emptyset$.
3) $U \oplus V = \mathbb{R}^4$.
4) $\dim(U + V) = 3$ e $U \cap V = \mathcal{L}(\ (0, 0, 1, 3),\ (0, 0, 3, 5)\ )$.

Soluzione. Si vede istantaneamente che $U = \{(0, 0, z, t) \quad \text{t.c.} \quad (z, t) \in \mathbb{R}^2\}$, per cui il vettore $(0, 0, 3, 5) = -2(1, 2, 0, 0) + (2, 4, 3, 5) \in V \cap U$. D'altra parte $V \nsubseteq U$ perché $(1, 2, 0, 0) \notin U$. Ne segue che la risposta 1 è corretta e le altre sono palesemente sbagliate. $\square$

- *Esercizio* 7. Sia V il seguente sottospazio di $\mathcal{M}(2 \times 2; \mathbb{R})$:

$$V = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \right)$$

Allora
1) $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \right)$ è una base di V.
2) $V = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$.
3) $\dim(V) = 4$ e $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \right)$ è una base di V.
4) $V = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \right)$.

Soluzione. Conviene determinare la dimensione di V e quindi appurare quanti tra i vettori proposti nel testo sono linearmente indipendenti. Supponiamo allora che

$$x \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = 0$$

cioè

$$\begin{cases} x + 2y + z + 2t = 0 \\ -x + 2y + z + 2t = 0 \\ 2x - y + z - 2t = 0 \\ 2x + y + z - 2t = 0 \end{cases}$$

Riducendo la matrice corrispondente a questo sistema omogeneo si trova la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Quindi $\dim V = 4$ e le risposte 2 e 4 sono sbagliate. Per controllare le risposte 1 e 3 basta ripetere lo stesso ragionamento sulle quaterne di vettori proposte. Quelli della risposta 1 danno la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ che, una volta ridotta diventa $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ che ha rango 4, provando che $\mathcal{B}$ è effettivamente una base di V e la risposta 1 è giusta.

Invece quelli della risposta 3 danno la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ che, una volta ridotta diventa $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ che ha rango 3, provando che $\mathcal{B}$ non è una base di V e la risposta 3 è sbagliata. $\square$

• *Esercizio* 8. Sia $k \in \mathbb{R}$ e T l'operatore di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base standard è

$$\mathcal{M}(T) = A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 9 \\ -15 & k & 15 \\ -6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Allora:

1) T è diagonalizzabile se e solo se $k \neq -1$ e $\mathcal{B} = \left((1,0,1),\ (0,1,0),\ \left(3, \frac{15}{k+1},\ 2\right) \right)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di T.

2) T è diagonalizzabile se e solo se $k \notin \{-1, 2\}$ e $\mathcal{B} = \left((1,0,1),\ (0,1,0),\ \left(3, \frac{15}{k+1},\ 2\right) \right)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di T.

3) Se $k \neq -1$ allora T è diagonalizzabile e $\mathcal{B} = \left((1,1,1),\ (0,1,0),\ \left(3, \frac{15}{k+1},\ 2\right) \right)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di T.

4) T è diagonalizzabile se e solo se $k = 2$ e $\mathcal{B} = (\ (1,1,1),\ (0,1,0),\ (3,5,\ 2)\ )$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di T.

Soluzione. Si calcola al solito modo il polinomio caratteristico

$$P_T(t) = \det(tI - A) = (t-k)(t+1)(t-2)$$

da cui si vede che per $k \notin \{-1, 2\}$ l'operatore T ha autovalori distinti e quindi è diagonalizzabile. Perciò la risposta 4 è sbagliata.

Tutte le terne ordinate di vettori menzionate nelle quattro risposte sono basi, in quanto i primi due vettori sono linearmente indipendenti ed il terzo non è una loro combinazione lineare perché altrimenti la prima e la terza coordinata sarebbero uguali.

$T(1,0,1) = (2,0,2)$, $T(0,1,0) = k(0,1,0)$, quindi,nelle prime due risposte, i primi due vettori sono effettivamente autovettori, mentre $T(1,1,1) = (2,k,2)$. Perciò, se $k \neq 2$, $(1,1,1)$ non è un autovettore e la risposta 3 è sbagliata.

Per $k = 2$ abbiamo che $T(3, \frac{15}{3}, 2) = T(3,5,2) = (6,10,4) = 2(3,5,2)$ e quindi T è diagonalizzabile e la risposta 2 è sbagliata.

Resta da controllare che la risposta 1 è giusta, e basta calcolare

$$T(3, \frac{15}{k+1}, 2) = (-3, -45 + \frac{15k}{k+1} + 30, -2) = -(3, \frac{15}{k+1}, 2) \quad \square$$

• *Esercizio* 9. Sia f la forma bilineare di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base standard è

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 \\ -1 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

1) $\mathcal{B} = (\ (1,2,-1),\ (1,3,0),\ (2,4,-1)\ )$ è una base f-adattata.
2) $\mathcal{B} = (\ (1,3,0),\ (1,2,-1),\ (2,4,-1)\ )$ è una base f-adattata.
3) $\mathcal{B} = (\ (1,3,0),\ (1,2,-1),\ (3,7,-1)\ )$ è una base f-adattata.
4) $\mathcal{B} = (\ (1,2,-1),\ (1,3,0),\ (3,7,-1)\ )$ è una base f-adattata.

Soluzione. Riducendo con il metodo di Gauss la matrice A si trova la matrice $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ da cui si ha subito che $\ker^S(f) = \ker^D(f) = \mathcal{L}(2,4,-1)$, il che ci permette di escludere le risposte 3 e 4.

Calcolando $f((1,2,-1),(1,2,-1) = 1$ e $f((1,3,0),(1,3,0) = -1$ si elimina anche la risposta 2. La risposta 1 è effettivamente esatta perché $f((1,2,-1),(1,3,0) = 0$.

□

• *Esercizio* 10. Sia T l'operatore di $\mathbb{R}^3$ definito da

$$T(x,y,z) = (x+z, -x+2y, 3z)$$

e $\mathcal{B} = (\ (1,1,0),\ (0,2,0),\ (0,1,-1)\ )$ una base di $\mathbb{R}^3$. Detta $A = \mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(T)$ la matrice di T rispetto alla base standard, stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta:
1) $\det\big(\mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(T)\big) = -\frac{1}{2}\det(A)$.
2) $\det\big(\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(T)\big) = 2\det(A)$.
3) $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(T)$ è una matrice triangolare inferiore.
4) $\det\big(\mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(T)\big) = -2\det(A)$.

Soluzione. $P = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ha determinante -2, per cui $\mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$, essendo la sua inversa, ha determinante $-\frac{1}{2}$. Poiché $\mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(T) = \mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id})\mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(T)$, usando la formula di Binet si vede che la risposta 1 è giusta e che la 4 è sbagliata. Analogamente si vede che la 2 è sbagliata.

Per eliminare la 3 si osserva che $A = \mathcal{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Inoltre $P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ per cui $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(T) = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ non è triangolare inferiore ma superiore.

□