Le bugie

Pino Vigna Suria

8 12 2002

Pinocchio pensa un numero naturale compreso tra 0 e 15 e chiede al Grillo Parlante di indovinarlo attraverso delle domande cui Pinocchio potrà rispondere solo "sì"o "no". Naturalmente quattro domande oculate sono sufficienti per determinare il numero, qualunque sia; addirittura il Grillo può permettersi il lusso di manifestare tutte le domande in blocco e poi aspettare le risposte. Ecco un esempio:

- Domanda 1: Il numero appartiene all'insieme
$$D_1 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}?$$
- Domanda 2: Il numero appartiene all'insieme
$$D_2 = \{2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15\}?$$
- Domanda 3: Il numero appartiene all'insieme
$$D_3 = \{4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15\}?$$
- Domanda 4: Il numero appartiene all'insieme
$$D_4 = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}?$$

Ponendo, per $i =, 1, 2, 3, 4$ $a_i = \begin{cases} 1 \text{ se la risposta alla domanda } D_i \text{ è sì} \\ 0 \text{ se la risposta alla domanda } D_i \text{ è no} \end{cases}$
si ha immediatamente che il numero pensato da Pinocchio è $\sum_{i=1}^{4} a_i 2^{i-1}$. In altri termini il Grillo ha semplicemente chiesto le cifre binarie del numero da indovinare. Osserviamo anche che le quattro domande possono essere

formulate contemporaneamente così: dividendo il numero che hai pensato per 2^{i-1} si ha un quoziente dispari?

Approfittiamo della demenziale facilità dell'esempio per matematicizzarlo, in modo di guadagnare famigliarità con il linguaggio che ci permette di formulare, e poi risolvere, il problema molto più sottile che vogliamo affrontare in queste pagine.

Una *decisione* è un numero tra 0 e 15; una *serie di domande* è una funzione $D : \{0, \dots, 15\} \longrightarrow \{0,1\}^4$; una *serie di domande rivelatrici* è una coppia ordinata (D, C) dove D è una serie di domande e $C : \{0,1\}^4 \longrightarrow \{0, \dots, 15\}$ soddisfa $C \circ D = \mathrm{id}$.

Si tratta precisamente del problema che stiamo studiando: Pinocchio sceglie una decisione α, il Grillo assegna la funzione D, Pinocchio calcola $D(\alpha)$ e lo comunica al Grillo, che scopre $\alpha = C(D(\alpha))$.

Naturalmente il Grillo poteva scegliere, invece di (D, C), qualunque altra coppia (f, f^{-1}) dove $f : \{0, \dots, 15\} \longrightarrow \{0,1\}^4$ è una corrispondenza biunivoca, ma in nessun altro caso l'inversa è altrettanto semplice da calcolare come per la funzione D effettivamente proposta.

Il fatto che D abbia un'inversa a sinistra ci dice anche che deve essere iniettiva e quindi l'indovinello non può essere risolto con meno di quattro domande.

Così è tutto troppo facile e allora Pinocchio si ricorda del semplice artificio di poter mentire e comincia ad approfittarne spudoratamente; ma in questo modo il gioco perde ogni fascino. Alla fine il Grillo Parlante propone una versione che garantisce in divertimento senza scadere nella banalità dell'esempio che abbiamo fatto:

Pinocchio potrà scegliere il numero e sarà autorizzato, se lo desidera, a mentire su una delle risposte: il Grillo dovrà ugualmente indovinare il numero con sette domande.

Questa volta una decisione è una coppia ordinata (α, i) dove $\alpha \in \{0, \dots, 15\}$ è il numero da indovinare e $i \in \{0, \dots, 7\}$ stabilisce quando Pinocchio mentirà ($i = 0$ se non ci saranno bugie). L'insieme delle decisioni è $\{0, \dots, 15\} \times \{0, \dots, 7\}$ e proporre una serie di domande rivelatrici non è facile come prima.

Nondimeno possiamo trovarla e conviene usare on po' di algebra lineare.

Equipaggiamo l'insieme $\{0, 1\}$ con le usuali operazioni che lo trasformano in un campo K con 0 come elemento neutro della somma, ed identificheremo sistematicamente K^n con $\{0, \dots, 2^n - 1\}$ mandando l'n-upla ordinata $(x_1, \dots, x_n)$ in $\sum_{i=1}^{n} x_i 2^{i-1}$.

In K^7 consideriamo la base standard $(e_i)_{i=1,\ldots,7}$ e chiamiamo e_0 il vettore nullo. Prendiamo poi la matrice $A \in \mathcal{M}(3 \times 7, K)$ la cui i-esima colonna è costituita dalle cifre binarie di i, cioè

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e definiamo l'applicazione lineare $L_A : K^7 \longrightarrow K^3$ la cui matrice, rispetto alle basi standard, è A. Ovviamente $L_A(e_i)$ ci fornisce le cifre binarie di $i \quad \forall i = 0, \ldots, 7$.

A questo punto il Grillo si trova un'applicazione lineare, che sarà certamente iniettiva, $T : K^4 \longrightarrow K^7$ in modo che $\mathrm{Im} T = \ker L_A$ e chiede a Pinocchio, che ha preso una decisione (α, i), di comunicargli $T(\alpha)$; naturalmente il burattino non fornisce proprio $T(\alpha)$ così com'è, ma alterato all'$i-$esima risposta, cioè, e questo è il punto saliente di tutto il discorso,

Pinocchio comunica al Grillo $T(\alpha) + e_i$.

Questo dato è comunque sufficiente per svelare ogni mistero, infatti basta calcolare $L_A(T(\alpha) + e_i) = L_A(e_i)$ che ci fornisce le cifre binarie di i e quindi dice quale delle risposte è stata alterata. A questo punto, avendo ormai trovato $T(\alpha)$, il grillo scopre facilmente α perché T è iniettiva. La sua incombenza diviene ancora più leggera se, al momento di produrre la T, si è anche procurato una $S : K^7 \longrightarrow K^4$ tale che $S \circ T = \mathrm{id}$.

Adesso spieghiamo i dettagli su come trovare la T e la S, che si riducono ad un facile esercizio di algebra lineare, e su come chiedere a Pinocchio di calcolarci $T(\alpha)$ in termini di sette domande con le risposte consentite “sì”o “no”.

L'applicazione lineare L_A ha evidentemente rango 3 e quindi il suo nucleo ha dimensione 4. Possiamo usare x_1, x_2, x_3, x_4 come variabili libere e così si trova immediatamente

$$\mathrm{Ker} L_A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 + x_4)$$
$$\text{tali che } (x_1, x_2, x_3, x_4) \in K^4\}$$

Quindi basta definire T mediante

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 + x_4)$$

Definendo $S : K^7 \longrightarrow K^4$ mediante $S(x_1, \ldots, x_7) = (x_1, \ldots, x_4)$ si ha una applicazione lineare tale che $S \circ T = \mathrm{id}$ ed è immediata da calcolare.

Resta da vedere come proporre le sette domande che obbligano Pinocchio, che ha preso la decisione (α, i), a fornire $T(\alpha) + e_i$.

Naturalmente assegnare la T equivale a dare le sette applicazioni lineari $T_i : K^4 \longrightarrow K$ definite da

$$T_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1$$

$$T_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2$$

$$T_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3$$

$$T_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4$$

$$T_5(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 + x_3 + x_4$$

$$T_6(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_3 + x_4$$

$$T_7(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_4$$

a cui vogliamo che Pinocchio risponda “no”se $\alpha \in \mathrm{Ker} T_i$. I sette sottoinsiemi di $\{0, \ldots, 15\}$ che forniscono le domande sono dunque $T_i^{-1}(1)$ per $i = 1, \ldots, 7$.

Ecco l'elenco completo.

- Domanda 1: α appartiene all'insieme

$$D_1 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}?$$

- Domanda 2: α appartiene all'insieme

$$D_2 = \{2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15\}?$$

- Domanda 3: α appartiene all'insieme

$$D_3 = \{4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15\}?$$

- Domanda 4: α appartiene all'insieme

$$D_4 = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}?$$

- Domanda 5: α appartiene all'insieme

$$D_5 = \{2, 3, 4, 5, 8, 9, 14, 15\}?$$

- Domanda 6: α appartiene all'insieme

$$D_6 = \{1, 3, 4, 6, 8, 10, 13, 15\}?$$

- Domanda 7: α appartiene all'insieme

$$D_7 = \{1, 2, 5, 6, 8, 11, 12, 15\}?$$

Sappiamo come interpretare le risposte, ma esaminiamo un esempio concreto: osserviamo che tutti gli elementi di K^7 possono essere proposti da Pinocchio, infatti la funzione

$$M : \{0, \dots, 15\} \times \{0, \dots, 7\} \longrightarrow K^7$$

che manda (α, i) in $T(\alpha)+e_i$ è iniettiva: se $M(\alpha, i) = T(\alpha)+e_i = T(\beta)+e_j = M(\beta, j)$ allora

$$L_A(e_i) = L_A(M(\alpha, i)) = L_A(M(\beta, j)) = L_A(e_j)$$

e quindi $e_i = e_j$ perché le colonne di A sono tutte diverse. Ne segue che $T(\alpha) = T(\beta)$ da cui $\alpha = \beta$ perché T è iniettiva.

Siccome $\{0, \dots, 15\} \times \{0, \dots, 7\}$ e K^7 hanno entrambi 128 elementi la funzione M è anche suriettiva.

Supponiamo, a titolo di esempio, che le risposte di Pinocchio abbiano prodotto $X = (0, 1, 1, 0, 1, 1, 1)$; allora $XA = (1, 0, 1)$ cioè $i = 1 + 2^2 = 5$ e dunque Pinocchio ha mentito alla quinta risposta, cioè $T(\alpha) = (0, 1, 1, 0, 0, 1, 1)$ e $\alpha = S(0, 1, 1, 0, 0, 1, 1) = 2 + 2^2 = 6$.

Se invece $X = (1, 1, 1, 1, 0, 1, 0)$ allora $XA = (0, 1, 0)$, $i = 2$, $T(\alpha) = (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0)$ e $\alpha = S(1, 0, 1, 1, 0, 1, 0) = 1 + 2^2 + 2^3 = 13$.