Inverse di Matrici

Pino Vigna Suria

29 novembre 2007

Supponiamo che A sia una matrice quadrata di ordine n su un campo qualunque $\mathbb{K}$, che sia invertibile, cioè di rango n. Descriviamo, giustificandole, due tecniche per trovare la sua inversa.

La prima consiste nell'elaborare, mediante operazioni elementari sulle righe, la matrice A fino a trovare la matrice identica I; ripetendo esattamente le stesse operazioni sulla matrice I, si ottiene una matrice B che è proprio l'inversa di A.

Si tratta di giustificare la validità di tale metodo.

Conviene prima investigare la situazione che segue: siano V, W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ di dimensione n, m rispettivamente, $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ basi per V e W rispettivamente, $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ e $A = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(T) \in \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{K})$ la sua matrice. Ci domandiamo che cosa succede alla matrice A se modifichiamo opportunamente la base del codominio, precisamente

- Siano $i < j \in \overline{m}$ e sia $\mathcal{D}$ la base di W ottenuta da $\mathcal{C}$ scambiando c_i con c_j. Se $A' = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(T)$, avremo che, per ogni $k \in \overline{n}$,

  $$T(b_k) = a'_{1k}d_1 + \ldots + a'_{ik}d_i + \ldots + a'_{jk}d_j + \ldots + a'_{mk}d_m =$$

  $$a'_{1k}c_1 + \ldots + a'_{ik}c_j + \ldots + a'_{jk}c_i + \ldots + a'_{mk}c_m$$

  ma anche

  $$T(b_k) = a_{1k}c_1 + \ldots + a_{ik}c_i + \ldots + a_{jk}c_j + \ldots + a_{mk}c_m$$

  e quindi, per l'unicità delle coordinate, $a'_{sk} = a_{sk}$ se $s \notin \{i, j\}$, $a'_{ik} = a_{jk}$ e $a'_{jk} = a_{ik}$, cioè la matrice A' si ottiene da A scambiando tra loro la $i-$ esima e la $j-$ esima riga.

- Siano $i \in \overline{m}$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ e sia $\mathcal{D}$ la base di W ottenuta da $\mathcal{C}$ dividendo c_i per λ. Se $A' = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(T)$, avremo che, per ogni $k \in \overline{n}$,

  $$T(b_k) = a'_{1k}d_1 + \ldots + a'_{ik}d_i + \ldots + a'_{mk}d_m = a'_{1k}c_1 + \ldots + a'_{ik}\lambda^{-1}c_i + \ldots + a'_{mk}c_m$$

  ma anche
  $$T(b_k) = a_{1k}c_1 + \ldots + a_{ik}c_i + \ldots + a_{mk}c_m$$
  e quindi $a'_{sk} = a_{sk}$ se $s \neq i$ e $a'_{ik} = \lambda a_{ik}$, cioè la matrice A' si ottiene da A moltiplicando per λ la $i-$ esima riga.

- Siano $i < j \in \overline{m}$ e sia $\mathcal{D}$ la base di W ottenuta da $\mathcal{C}$ sostituendo c_i con $c_i - c_j$. Se $A' = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(T)$, avremo che, per ogni $k \in \overline{n}$,

  $$T(b_k) = a'_{1k}d_1 + \ldots + a'_{ik}d_i + \ldots + a'_{jk}d_j + \ldots + a'_{mk}d_m =$$

  $$a'_{1k}c_1 + \ldots + a'_{ik}(c_i - c_j) + \ldots + a'_{jk}c_j + \ldots + a'_{mk}c_m =$$
  $$a'_{1k}c_1 + \ldots + a'_{ik}c_i + \ldots + (a'_{jk} - a'_{ik})c_j + \ldots + a'_{mk}c_m$$
  ma anche

  $$T(b_k) = a_{1k}c_1 + \ldots + a_{ik}c_i + \ldots + a_{jk}c_j + \ldots + a_{mk}c_m$$

  e quindi $a'_{sk} = a_{sk}$ se $s \neq j$, $a'_{jk} - a'_{ik} = a_{jk}$ da cui segue che $a'_{jk} = a_{jk} + a_{ik}$, cioè la matrice A' si ottiene da A sostituendo la $j-$ esima riga con la somma tra lei e la $i-$ esima.

In definitiva se la matrice A' è ottenuta da A mediante operazioni elementari sulle righe essa rappresenta lo stesso operatore ma rispetto a due basi in cui quella del codominio è stata modificata secondo le regole descritte.

Torniamo all'incombenza che ci eravamo proposti, data la matrice invertibile A di ordine n scegliamo uno spazio vettoriale V di dimensione n ed una sua base $\mathcal{B}$, e sia T l'operatore su V tale che $A = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(T)$; allora $I = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$. Sia $\mathcal{D}$ la base, ottenuta come descritto sopra, tale che $I = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(T)$ e quindi $B = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(\mathrm{id}_V)$. Allora avremo che

$$BA = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(\mathrm{id}_V) \cdot \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(T) = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(\mathrm{id}_V \circ T) = \mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(T) = I$$

Tanto basta per verificare che B è l'inversa di A.

Quest'altra dimostrazione mi è stata suggerita da Mattia Gastaldello.

Anche qui conviene affrontare il problema in modo più astratto: siano $A \in \mathcal{M}(m \times n, \mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}(p \times m, \mathbb{K})$ e poniamo $C = B \cdot A \in \mathcal{M}(p \times n, \mathbb{K})$. Si vede subito che, esprimendo le matrici B e C in termini delle loro righe, abbiamo che, per ogni $i \in \overline{p}$,

$$B_i \cdot A = C_i$$

L'osservazione cruciale è che se modifichiamo la matrice B nella matrice B' mediante operazioni elementari sulle righe, la matrice $B' \cdot A$ è precisamente la matrice C' ottenuta da C mediante le stesse operazioni elementari. Infatti

- Siano $i \neq j \in \overline{p}$ e supponiamo di avere $B'_s = B_s$ se $s \neq j$ e $B'_j = B_i + B_j$, allora
$$B'_s \cdot A = B_s \cdot A = C_s = C'_s \text{ se } s \neq j \text{ e}$$
$$B'_j \cdot A = (B_i + B_j) \cdot A = B_i \cdot A + B_j \cdot A = C_i + C_j = C'_j$$
- Siano $i \in \overline{p}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e supponiamo di avere $B'_s = B_s$ se $s \neq i$ e $B'_i = \lambda B_i$, allora
$$B'_s \cdot A = B_s \cdot A = C_s = C'_s \text{ se } s \neq i \text{ e } B'_i \cdot A = \lambda B_i \cdot A = \lambda C_i = C'_i$$
- Se l'operazione elementare é uno scambio di righe il risultato è istantaneo.

Per applicare questo risultato prendiamo $p = m = n$ e $B = I$, e, di conseguenza $C = A$. Se attraverso operazioni elementari sulle righe modifichiamo $I = B$ in B' e $A = C$ in $C' = I$, avremo che $B' \cdot A = C' = I$, e cioè B' è l'inversa di A, come desiderato.

L'altra tecnica coinvolge il determinante: sia A una matrice quadrata di ordine n, poniamo $C = A^t$, per ogni $(i, k) \in \overline{n} \times \overline{n}$ sia C_{ik} la matrice $(n-1) \times (n-1)$ che si ottiene da C eliminandone la $i-$esima riga e la $k-$esima colonna. Poniamo $b_{ik} = (-1)^{i+k} \det(C_{ik})$.

Affermo che $AB = \det(A) \cdot I$ e quindi se A è invertibile $\det(A)^{-1} \cdot B$ è l'inversa di A.

Si deve controllare che

- Per ogni $i \in \overline{n},\ ab_{ii} = \det(A)$, ed è facile perché

  $$ab_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} \det(C_{ki}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik})$$

  che è precisamente lo sviluppo di Laplace di $\det(A)$ secondo la $i-$ esima riga.

- Se invece $i \neq j$ sia D la matrice che si ottiene da A rimuovendo la sua $j-$esima riga e rimpiazzandola con la $i-$esima riga, cioè

  $$\forall (s,k) \in \overline{n} \times \overline{n},\ d_{sk} = \begin{cases} a_{sk} & \text{se} \quad s \neq j \\ a_{ik} & \text{se} \quad s = j \end{cases}$$

  Osserviamo che $\det(D) = 0$ perché D ha due righe uguali, e che, per ogni $k \in \overline{n},\ D_{jk} = A_{jk}$ perchè le righe di D, con l'eccezione della $j-$ esima che viene sempre eliminata, sono uguali a quelle di A.

  allora avremo

  $$ab_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{ik} \det(C_{kj}) =$$

  $$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{ik} \det(A_{jk}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} d_{jk} \det(D_{jk})$$

  che vale 0 in quanto è precisamente lo sviluppo di $\det(D)$ secondo la sua $j-$ esima riga.

Quindi possiamo utilizzare entrambe le tecniche esposte per calcolare l'inversa di una matrice.