Il teorema di Schröder-Bernstein

Pino Vigna Suria

25 2 2004

Lemma 1. *Siano $B \subseteq A$ insiemi e $f : A \longrightarrow A$ una funzione iniettiva tale che* $\mathrm{Im} f \subseteq B$*; allora esiste una corrispondenza biunivoca $h : A \longrightarrow B$.*

Dimostrazione. Per ogni numero naturale n definiamo ricorsivamente $f^n : A \longrightarrow A$ mediante $f^0 = \mathrm{id}_A, \quad f^{n+1} = f \circ f^n$; poniamo inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $X_n = f^n(A-B)$ e $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Ci saranno utili alcune osservazioni su questi insiemi:

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, f^n è iniettiva.
2. $f^n \circ f^m = f^{n+m}$.
3. Per ogni $n > 0$, $\mathrm{Im} f^n \subseteq B$.
4. se $n < m$, $X_n \cap X_m = \emptyset$. Infatti se esistono $x, y \in A-B$, tali che $f^n(x) = f^m(y) = f^n(f^{m-n}(y))$, allora $x = f^{m-n}(y) \in B$, assurdo.
5. $X = (A - B) \cup f(X)$.

Definiamo $h : A \longrightarrow B$ mediante

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \notin X \\ f(x) & \text{se} \quad x \in X \end{cases}$$

e verifichiamo che

1. $h(x) \in B$, $\forall x \in A$; infatti, se $x \notin X$ allora $x \notin A - B$ e $h(x) = x \in B$; se invece $x \in X$ allora $h(x) = f(x) \in B$.

2. h è iniettiva; infatti se $h(x) = h(y)$ si danno, potenzialmente, tre eventualità: a) $x \in A - X$ e $y \in X$, ma allora $x = h(x) = h(y) = f(y)$ da cui segue che $x \in f(X) \subseteq X$, assurdo; b) $x, y \in A - X$ e allora $x = h(x) = h(y) = y$; c) $x, y \in X$ e allora $f(x) = h(x) = h(y) = f(y)$ da cui segue che $x = y$ perché f è iniettiva.

3. h è suriettiva; infatti, se $y \in B$ si danno due possibilità: a) $y \in X$ da cui segue che $y \in f(X)$ e quindi esiste $x \in X$ tale che $f(x) = y$, ma allora anche $h(x) = y$, oppure b) $y \notin X$ da cui $h(y) = y$.

Il lemma è dunque dimostrato. $\square$

Teorema 1. *Se A, C sono insiemi ed esistono due funzioni iniettive $g : A \longrightarrow C$ e $p : C \longrightarrow A$, allora esiste una corrispondenza biunivoca $\phi : A \longrightarrow C$.*

Dimostrazione. La funzione $p : C \longrightarrow p(C)$ è biettiva e $p \circ g : A \longrightarrow A$ è una funzione iniettiva la cui immagine è contenuta in $p(C)$; per il lemma esiste una corrispondenza biunivoca $h : A \longrightarrow p(C)$; ma allora $\phi = p^{-1} \circ h$ è una biezione. $\square$