Appunti di Geometria
Terza unità didattica

Pino Vigna Suria

17 febbraio 2009

Indice

Capitolo 1

Spazi affini

1.1 Spazi affini

Definizione 1. *Uno* spazio affine *è una terna ordinata* $(X, \overline{X}, -)$ *dove* X *è un insieme,* $\overline{X}$ *è uno spazio vettoriale e*

$$- : X \times X \longrightarrow \overline{X}$$

è una funzione che manda la coppia ordinata (P, Q) *nel vettore* $Q - P \in \overline{X}$ *e che soddisfa i seguenti assiomi:*

A1 $\forall P, Q, R \in X \quad R - P = (R - Q) + (Q - P)$.

A2 $\forall P \in X,\ v \in \overline{X}\ \exists! Q \in X$ *tali che* $Q - P = v$.

Se non c'è pericolo di confusione denoteremo uno spazio affine $(X, \overline{X}, -)$ semplicemente con X; si pone $\dim X = \dim \overline{X}$.

Gli elementi di X sono chiamati *punti*, e uno spazio affine gode delle seguenti proprietà

Proposizione 1. *Per ogni* $P, Q \in X$

1. $P - P = 0$.
2. $Q - P = -(P - Q)$.

Dimostrazione. Prendendo in $A1 \quad P = Q = R$ si trova $P - P = (P - P) + (P - P)$ e, semplificando, si ha il primo risultato. Prendendo $P = R$ si trova $(P - Q) + (Q - P) = P - P = 0$. □

Se $P \in X$ e $v \in \overline{X}$ indichiamo con la notazione $P + v$ l'unico punto Q tale che $Q - P = v$. In questo modo si ottiene una funzione

$$+ : X \times \overline{X} \longrightarrow X$$

che gode delle seguenti proprietà

1. $\forall P \in X \quad P + 0 = P$.
2. $\forall P \in X,\ \forall v, w \in \overline{X} \quad P + (v + w) = (P + v) + w$
3. $\forall P, Q \in X,\ \forall v \in \overline{X}, \quad (P + v) - Q = (P - Q) + v$.

la prima affermazione è ovvia, per quanto riguarda la seconda poniamo $Q = P + v$ e $R = Q + w$; si tratta di verificare che $R - P = v + w$, e questo segue da $A1$ e dalla commutatività della somma in $\overline{X}$. La terza affermazione si prova così: sia $R = P + v$, allora $R - Q = (R - P) + (P - Q) = v + (P - Q) = (P - Q) + v$.

Se V è uno spazio vettoriale possiamo costruire uno spazio affine, che denoteremo ancora con V, definendo $X = \overline{X} = V$ e $-$ come la effettiva differenza di vettori. In questo senso siamo autorizzati ad interpretare ogni spazio vettoriale come spazio affine.

Se X è uno spazio affine e $O \in X$, l'assioma $A2$ dice precisamente che la funzione $\phi_O : X \longrightarrow \overline{X}$ definita da $\phi_O(P) = P - O$ è una corrispondenza biunivoca.

Proposizione 2. *Sia X uno spazio affine e $\emptyset \neq Y \subseteq X$. Se $O \in Y$ e $\phi_O(Y)$ è un sottospazio vettoriale di $\overline{X}$ allora, per ogni $P \in Y$, $\quad \phi_O(Y) = \phi_P(Y)$.*

Dimostrazione. Sia $v \in \phi_O(Y)$ e poniamo $Q = P + v$ allora $Q - O = (Q - P) + (P - O) = v + (P - O) \in \phi_O(Y)$ e allora $Q \in Y$, quindi $v = Q - P \in \phi_P(Y)$.

Viceversa, se $v \in \phi_P(Y)$ allora $Q = P + v \in Y$ e, di conseguenza, $Q - O \in \phi_O(Y)$; ne segue che $v = Q - P = (Q - O) + (O - P) = (Q - O) - (P - O) \in \phi_O(Y)$. $\square$

Definizione 2. *Sia X uno spazio affine e $Y \subseteq X$. Si dice che Y è un* sottospazio affine *di X se Y è vuoto oppure, per ogni $O \in Y$, $\phi_O(Y)$ è un sottospazio vettoriale di $\overline{X}$; in tal caso $\phi_O(Y)$, che, alla luce della proposizione precedente non dipende da $O \in Y$, si chiama la* giacitura *di Y e si indica con $\overline{Y}$. Si usa allora la notazione $Y \blacktriangleleft X$.*

Se $Y \blacktriangleleft X$ e Y non è vuoto, la restrizione di $-$ a $Y \times Y$ assume tutti i suoi valori in $\overline{Y}$ e $(Y, \overline{Y}, -)$ è uno spazio affine. Si dice che uno sottospazio affine Y di X *passa* per $P \in X$ se $P \in Y$.

Esempio 1. *Se $W \lhd \overline{X}$ e $P \in X$ allora $P + W = \{P + w \text{ tali che } w \in W\}$ è l'unico sottospazio affine di X che passa per P e ha W come giacitura; in altri termini ogni sottospazio affine non vuoto è determinato da un suo qualunque punto e dalla sua giacitura.*

Tutti i singoletti di X e X stesso sono sottospazi affini di X. I sottospazi affini di dimensione $1, 2, \dim X - 1$ *sono chiamati, rispettivamente,* rette, piani *e* iperpiani*; per un tollerabile abuso chiameremo* punti *i singoletti di X.*

Se $Y, Z \blacktriangleleft X$ allora $Y \cap Z$ è il più grande sottospazio affine di X contenuto in Y ed in Z. Se $Y \cap Z \neq \emptyset$ allora $\overline{Y \cap Z} = \overline{Y} \cap \overline{Z}$.

Definizione 3. *Siano Y, Z sottospazi affini di uno spazio affine X; si dice che Y e Z sono* paralleli *se almeno uno dei due è vuoto oppure $\overline{Y} \subseteq \overline{Z}$ oppure $\overline{Z} \subseteq \overline{Y}$.*

Proposizione 3. *Se Y, Z sono sottospazi affini paralleli di uno spazio affine X allora o $Y \cap Z = \emptyset$ o $Y \subseteq Z$ o $Z \subseteq Y$.*

Dimostrazione. Se $O \in Y \cap Z$ e $\overline{Y} \subseteq \overline{Z}$ allora, per ogni $P \in Y$, $P - O \in \overline{Y} \Rightarrow P - O \in \overline{Z} \Rightarrow P \in Z$. Analogamente se $\overline{Z} \subseteq \overline{Y}$. $\square$

È facile trovare esempi di sottospazi affini disgiunti ma non paralleli.

Sia $(P_1, \ldots, P_{n+1})$ una $(n+1)$-upla ordinata di elementi di uno spazio affine X.

Definizione 4. *Si dice che i punti $P_1, \ldots, P_{n+1}$ sono* affinemente indipendenti *o in* posizione generica *se i vettori $P_1 - P_{n+1}, \ldots, P_n - P_{n+1}$ sono linearmente indipendenti.*

Si dice che $(P_1, \ldots, P_{n+1})$ è un riferimento affine *di X se la n-upla ordinata $(P_1 - P_{n+1}, \ldots, P_n - P_{n+1})$ è una base di $\overline{X}$.*

Se $\mathcal{P} = (P_1, \ldots, P_{n+1})$ è un riferimento affine di X indicheremo con $\overline{\mathcal{P}}$ la base $(P_1 - P_{n+1}, \ldots, P_n - P_{n+1})$.

Se $P \in X$ e $\mathcal{B}$ è una base di $\overline{X}$ allora, ponendo, per ogni $i = 1, \ldots, n$, $P_i = P + b_i$ e $P_{n+1} = P$, si ottiene un riferimento affine di X; in definitiva un riferimento affine può essere assegnato anche dando un punto e una base per $\overline{X}$.

Se V è uno spazio vettoriale che ha una base standard $\overline{\mathcal{E}}$ e viene interpretato come spazio affine il suo riferimento affine $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n, 0)$ prende l'aggettivo *standard*.

Se $\mathcal{P} = (P_1, \dots, P_{n+1})$ è un riferimento affine di X e $P \in X$ allora $P - P_{n+1}$ può essere scritto, in modo unico, come

$$P - P_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} x_i (P_i - P_{n+1})$$

e la n-upla ordinata $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ è detta la n-upla delle *coordinate affini* di P rispetto a $\mathcal{P}$.

1.2 Mappe affini

Siano $(X, \overline{X}, -)$ e $(Y, \overline{Y}, -)$ spazi affini, $f : X \longrightarrow Y$ una funzione e $O \in X$; possiamo definire una funzione $f_O : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$ mediante $f_O = \phi_{f(O)} \circ f \circ \phi_O^{-1}$, cioè f_O è l'unica funzione che rende commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \phi_O \downarrow & & \downarrow \phi_{f(O)} \\ \overline{X} & \xrightarrow{f_O} & \overline{Y} \end{array}$$

Più rapidamente f_O è definita dal fatto che , per ogni $P \in X, \quad f_O(P - O) = f(P) - f(O)$. Notiamo che f_O è iniettiva (suriettiva) se e solo se f lo è e che $f_O(0) = 0$, mentre non è affatto detto che f_O sia lineare. Ma se è così...

Proposizione 4. *Se f_O è lineare allora, per ogni $P \in X$, $f_O = f_P$.*

Dimostrazione. Per ogni $v \in \overline{X}$ poniamo $Q = P + v$ allora

$$f_P(v) = f_P(Q - P) = f(Q) - f(P) = (f(Q) - f(O)) + (f(O) - f(P)) =$$

$$(f(Q) - f(O)) - (f(P) - f(O)) = f_O(Q - O) - f_O(P - O) = f_O((Q - O) - (P - O))$$
$$= f_O((Q - O) + (O - P)) = f_O(Q - P) = f_O(v).$$

□

Definizione 5. *Si dice che* $f : X \longrightarrow Y$ *è una* mappa affine *se, per ogni* $O \in X$, $\quad f_O$ *è lineare. La funzione* $\overline{f} = f_O \in \mathrm{Hom}(\overline{X}, \overline{Y})$ *è detta la* giacitura *di* f.

L'insieme di tutte le mappe affini da X a Y si denota con $\mathrm{Aff}(X, Y)$.

Esempio 2.

1. *L'identita* id_X *è una mappa affine e la sua giacitura è* $\mathrm{id}_{\overline{X}}$.

2. *Le funzioni costanti sono affini e la loro giacitura è la mappa nulla.*

3. *La composizione di due mappe affini* f, g *è affine e* $\overline{g \circ f} = \overline{g} \circ \overline{f}$

4. *Siano* V, W *sono spazi vettoriali sul campo* $\mathbb{K}$ *e* $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$. *Interpretando* V *e* W *come spazi affini si ha che* T *è affine e* $\overline{T} = T$.

5. *Se* f *è affine e biettiva allora anche* f^{-1} *è affine e* $\overline{f^{-1}} = \overline{f}^{-1}$.

6. *Se* $P \in X$, $Q \in Y$ *e* $T \in \mathrm{Hom}(\overline{X}, \overline{Y})$ *esiste un'unica mappa affine* $f \in \mathrm{Aff}(X, Y)$ *tale che* $f(P) = Q$ *e* $\overline{f} = T$. *Infatti possiamo e dobbiamo definire, per ogni* $R \in X$, $f(R) = Q + T(R - P)$.

7. *Se* $(P_1, \ldots, P_{n+1})$ *è un riferimento affine di* X *e* $(Q_1, \ldots, Q_{n+1})$ *è una* $(n+1)$*-upla ordinata in* Y *esiste un'unica mappa affine* $f \in \mathrm{Aff}(X, Y)$ *tale che* $f(P_i) = Q_i \quad \forall i = 1, \ldots, n+1$.

Siano X, Y spazi affini, $\mathcal{P} = (P_1, \ldots, P_{n+1})$, $\quad \mathcal{Q} = (Q_1, \ldots, Q_{m+1})$ riferimenti affini per X e Y rispettivamente

Definizione 6. *Se* $f \in \mathrm{Aff}(X, Y)$ *la* matrice *di* f *rispetto a* $\mathcal{P}$ *e* $\mathcal{Q}$ *è la matrice*

$$\mathcal{M}^{\mathcal{P}}_{\mathcal{Q}}(f) = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}((m+1) \times (n+1); \mathbb{K})$$

dove $A = \mathcal{M}^{\overline{\mathcal{P}}}_{\overline{\mathcal{Q}}}(\overline{f})$, 0 *è il vettore nullo di* $\mathcal{M}(1 \times n; \mathbb{K})$ *e* $\alpha \in \mathcal{M}(m \times 1; \mathbb{K})$ *è dato da* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^t$ *dove* $f(P_{n+1}) - Q_{m+1} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j (Q_j - Q_{m+1})$.

L'utilità principale di tale matrice è data dal seguente

Teorema 1. *Se* $(x_1, \ldots, x_n)$ *sono le coordinate affini di* P *rispetto a* $\mathcal{P}$ *e* $(y_1, \ldots, y_m)$ *sono le coordinate affini di* $f(P)$ *rispetto a* $\mathcal{Q}$, $X = (x_1, \ldots, x_n)^t$, $Y = (y_1, \ldots, y_m)^t$ *allora*

$$AX + \alpha = Y \ \text{cioè}\ \mathcal{M}^{\mathcal{P}}_{\mathcal{Q}}(f) \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dimostrazione.

$$\sum_{j=1}^{m} y_j(Q_j - Q_{m+1}) = f(P) - Q_{m+1} = (f(P) - f(P_{n+1})) + (f(P_{n+1}) - Q_{m+1}) =$$

$$\overline{f}(P - P_{n+1}) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j(Q_j - Q_{m+1}) = \overline{f}(\sum_{i=1}^{n} x_i(P_i - P_{n+1})) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j(Q_j - Q_{m+1}) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{f}(P_i - P_{n+1}) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j(Q_j - Q_{m+1}) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji}(Q_j - Q_{m+1}) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j(Q_j - Q_{m+1}) =$$

$$\sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i)(Q_j - Q_{m+1}) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j(Q_j - Q_{m+1}) =$$

$$\sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i + \alpha_j)(Q_j - Q_{m+1})$$

e la tesi segue dall'unicità delle coordinate. $\square$

Inoltre la matrice della composizione di mappe affini è il prodotto delle rispettive matrici.

Definizione 7. *Una mappa affine* $f \in \mathrm{Aff}(X, X)$ *è detta* traslazione *se* $\overline{f} = \mathrm{id}_{\overline{X}}$.

Proposizione 5. $f \in \mathrm{Aff}(X, X)$ *è una traslazione se e solo se esiste* $v \in \overline{X}$ *tale che* $f(P) = P + v, \quad \forall P \in X$.

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Scegliamo a caso $O \in X$ e poniamo $v = f(O) - O$ e sia $P \in X$; allora $f(P) - P = (f(P) - f(O)) + (f(O) - O) + (O - P) = \overline{f}(P - O) + v + (O - P) = (P - O) + v + (O - P) = v$.

$\Leftarrow$ Scegliamo a caso $O \in X$, allora, per ogni $w \in \overline{X}$, $\quad \overline{f}(w) = f(O + w) - f(O) = (O + w + v) - (O + v) = ((O + v) + w) - (O + v) = w$. $\square$

Per ogni $v \in \overline{X}$ indicheremo con T_v la traslazione definita da $T_v(P) = P + v$, per ogni $P \in X$.

Proposizione 6. *Siano X, Y spazi affini, $f \in \mathrm{Aff}(X, Y)$, $X' \blacktriangleleft X$, $Y' \blacktriangleleft Y$.*

1. *$f(X') \blacktriangleleft Y$ e, se $X' \neq \emptyset$, $\overline{f(X')} = \overline{f}(\overline{X'})$.*

2. *$f^{-1}(Y') \blacktriangleleft X$ e, se non è vuoto, $\overline{f^{-1}(Y')} = \overline{f}^{-1}(\overline{Y'})$.*

Dimostrazione. 1. Se $X' = \emptyset$ allora $f(X') = \emptyset$; se $O \in X'$ allora $f(O) \in f(X')$; dobbiamo anzitutto provare che $\phi_{f(O)}(f(X'))$ è un sottospazio di $\overline{Y}$ e dimostreremo anche la seconda affermazione controllando che $\phi_{f(O)}(f(X')) = \overline{f}(\overline{X'})$.

$w \in \phi_{f(O)}(f(X')) \Rightarrow f(O) + w \in f(X') \Rightarrow \exists P \in X'$ tale che $f(P) = f(O) + w$ cioè $w = f(P) - f(O) = \overline{f}(P - O)$; ma $P - O \in \overline{X'}$.

Viceversa, se $w \in \overline{f}(\overline{X'})$, $\exists v \in \overline{X'}$ tale che $\overline{f}(v) = w$; ma allora $O+v \in X'$ e quindi $f(O+v) \in f(X')$ e dunque $f(O+v)-f(O) \in \phi_{f(O)}(f(X'))$; la tesi segue ora dal fatto che $f(O + v) - f(O) = \overline{f}(v) = w$.

2. Se $O \in f^{-1}(Y')$ allora $f(O) \in Y'$ e dobbiamo provare che $\phi_O(f^{-1}(Y'))$ è un sottospazio di $\overline{X}$; come sopra qui proveremo anche l'altra affermazione controllando che $\phi_O(f^{-1}(Y')) = \overline{f}^{-1}(\overline{Y'})$.

$v \in \phi_O(f^{-1}(Y')) \Rightarrow O + v \in f^{-1}(Y') \Rightarrow f(O + v) \in Y' \Rightarrow \overline{f}(v) = f(O + v) - f(O) \in \overline{Y'} \Rightarrow v \in \overline{f}^{-1}(\overline{Y'})$.

Viceversa $v \in \overline{f}^{-1}(\overline{Y'}) \Rightarrow \overline{f}(v) \in \overline{Y'} \Rightarrow f(O + v) = f(O) + \overline{f}(v) \in Y' \Rightarrow O + v \in f^{-1}(Y') \Rightarrow v \in \phi_O(f^{-1}(Y'))$.

$\square$

È facile vedere che le immagini di sottospazi affini paralleli mediante una mappa affine sono ancora paralleli. Se $X' \blacktriangleleft X$ non è vuoto e $O \in X'$ prendiamo una p-upla di generatori $(v_1, \ldots, v_p)$ di $\overline{X'}$; avremo che $P \in X' \Leftrightarrow P - O \in \overline{X'} = \mathcal{L}(v_1, \ldots, v_p) \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tali che $P - O = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j v_j$.

Se poi $\mathcal{P} = (P_1, \ldots, P_{n+1})$ è un riferimento affine di X, allora, per ogni $j = 1, \ldots, p$, esistono degli scalari $a_{j1}, \ldots, a_{jn}$ tali che $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}(P_i - P_{n+1})$ e degli scalari $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tali che $O - P_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(P_i - P_{n+1})$. Se $P \in X$ e $(x_1, \ldots, x_n)$ sono le sue coordinate affini rispetto a $\mathcal{P}$ avremo che

$$P \in X' \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i(P_i - P_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(P_i - P_{n+1}) = (P - P_{n+1}) - (O - P_{n+1}) =$$

$$P - O = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} a_{ji}(P_i - P_{n+1})$$

da cui, con un conto ormai familiare, si deduce che $P \in X'$ se e solo se

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \alpha_1 + \lambda_1 a_{11} + \ldots + \lambda_p a_{p1} \\ x_2 & = & \alpha_2 + \lambda_1 a_{12} + \ldots + \lambda_p a_{p2} \\ \ldots & = & \ldots \\ x_n & = & \alpha_n + \lambda_1 a_{1n} + \ldots + \lambda_p a_{pn}. \end{array}$$

Queste equazioni si chiamano le *equazioni parametriche* del sottospazio affine X' rispetto al riferimento affine $\mathcal{P}$. La lettrice è invitata a scriverle in modo più compatto usando il linguaggio delle matrici.

Ricordiamo un risultato di algebra lineare che useremo immediatamente:

Proposizione 7. *Sia V uno spazio vettoriale e $U \triangleleft V$; sia $\dim V = n$, $\dim U = p$; esiste un'applicazione lineare $T \in \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K}^{n-p})$ tale che $\mathrm{Ker} T = U$.*

Dimostrazione. La proposizione è evidentemente vera se $p = 0$, basta prendere un isomorfismo tra V e $\mathbb{K}^n$.

Se $p > 0$, sia $\mathcal{B}$ una base per V scelta in modo che $(b_{n-p+1}, \ldots, b_n)$ sia una base di U e consideriamo la base duale $\mathcal{B}^* = (b_1^*, \ldots, b_n^*)$. Definiamo T ponendo

$$T(v) = (b_1^*(v), \ldots, b_{n-p}^*(v)) \in \mathbb{K}^{n-p}$$

Evidentemente T è lineare.

Se $u \in U$ allora $u = \sum_{i=n-p+1}^{n} x_i b_i$ e quindi, per ogni $j = 1, \ldots, n-p$ $b_j^*(u) = \sum_{i=n-p+1}^{n} x_i b_j^*(b_i) = 0$ e dunque $u \in \mathrm{Ker} T$.

Viceversa, se $v = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \notin U$, allora esiste $j = 1, \ldots, n-p$ tale che $x_j \neq 0$ da cui segue che $b_j^*(v) \neq 0$ e quindi $v \notin \mathrm{Ker} T$. $\square$

Corollario 1. *Siano $\emptyset \neq X' \blacktriangleleft X$, $\dim X = n, \dim X' = p$; esiste una mappa affine $f \in \mathrm{Aff}(X, \mathbb{K}^{n-p})$ tale che $X' = f^{-1}(0)$.*

Dimostrazione. Siano $O \in X'$, $T \in \mathrm{Hom}(\overline{X}, \mathbb{K}^{n-p})$ tale che $\mathrm{Ker} T = \overline{X'}$ e sia $f : X \longrightarrow \mathbb{K}^{n-p}$ l'unica mappa affine tale che $f(O) = 0$ e $\overline{f} = T$. Avremo allora che $P \in X' \Leftrightarrow P - O \in \overline{X'} \Leftrightarrow 0 = \overline{f}(P-O) = f(P) - f(O) = f(P)$. $\square$

Siano $\mathcal{P}$ un riferimento affine di X, $\mathcal{E}$ il riferimento affine standard di $\mathbb{K}^{n-p}$ e $\mathcal{M}^{\mathcal{P}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sia poi $P \in X$ e $(x_1, \ldots, x_n)$ le sue coordinate affini rispetto a $\mathcal{P}$; alla luce del teorema 1 avremo che $P \in X' \Leftrightarrow AX + \alpha = 0$, che, scritto per disteso, ammonta a

$$\begin{array}{lllllllll}
a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & + & \alpha_1 & = & 0 \\
a_{21}x_1 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & + & \alpha_2 & = & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n-p,1}x_1 & + & \ldots & + & a_{n-p,n}x_n & + & \alpha_{n-p} & = & 0.
\end{array}$$

E questa è un'*equazione cartesiana* di X' rispetto a $\mathcal{P}$. Notiamo che, per il teorema nullità +rango, la matrice A ha rango $n - p$.

1.3 Relazioni tra affine e vettoriale

Abbiamo già visto che ogni spazio vettoriale può essere interpretato come uno spazio affine e ogni applicazione lineare è anche affine. In particolare, se V, W sono spazi vettoriali e $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$, allora, per ogni $w \in W$ l'insieme $T^{-1}(w)$ è un sottospazio affine di V, la cui giacitura è $\mathrm{Ker}T$. L'esempio più eclatante di questo fenomeno è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare. In realtà, a meno di isomorfismi affini, ogni spazio affine nasce in questo modo.

Definizione 8. *Uno* spazio di Möbius *è una coppia ordinata* (V, α) *dove* V *è uno spazio vettoriale e* $0 \neq \alpha \in V^*$.

Se (V, α) è uno spazio di Möbius, allora l'insieme $\{\alpha = 1\} = \{v \in V \text{ tali che } \alpha(v) = 1\}$ è un sottospazio affine di V, e la sua giacitura è $\{\alpha = 0\} = \mathrm{Ker}\alpha$. Naturalmente sia $\{\alpha = 1\}$ che $\{\alpha = 0\}$ hanno dimensione uguale a $\dim V - 1$.

Proposizione 8. *Sia* $(X, \overline{X}, -)$ *uno spazio affine di dimensione* n*. Esiste uno spazio di Möbius* (V, α) *ed un isomorfismo affine* $J : X \longrightarrow \{\alpha = 1\}$*. In queste circostanze si dice che* (V, α) *è un'*estensione vettoriale *di* X mediante J.

Dimostrazione. Basta scegliere $V = \mathbb{K}^{n+1}$ e $\alpha : \mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}$ definita da $\alpha(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}$ per trovare lo spazio di Möbius. Per trovare la J scegliamo un riferimento affine $(P_1, \dots, P_{n+1})$ di X e definiamo $J(P) = (x_1, \dots, x_n, 1)$, dove $P - P_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} x_i(P_i - P_{n+1})$; le poche verifiche necessarie sono facilissime. $\square$

Naturalmente esistono tanti spazi di Möbius che contengono (una copia isomorfa di) un determinato spazio affine e anche la sua giacitura, nel senso della proposizione 8; fortunatamente tra loro esiste un preciso legame.

Definizione 9. *Siano* (V, α) *e* (U, β) *spazi di Möbius. Un'applicazione lineare* $T \in \mathrm{Hom}(V, U)$ *viene detta* applicazione baricentrica *se* $\beta \circ T = \alpha$. *Viene detta* isomorfismo baricentrico *se è anche biettiva. Ovviamente in questo caso anche* T^{-1} *è un isomorfismo baricentrico.*

Proposizione 9. *Siano* $(X, \overline{X}, -)$ *uno spazio affine e* (V, α) *una sua estensione vettoriale mediante* $J : X \longrightarrow \{\alpha = 1\}$. *Se* W *è un qualunque spazio vettoriale e* $f : X \longrightarrow W$ *è una mappa affine esiste un unica* $F \in \mathrm{Hom}(V, W)$ *tale che* $F \circ J = f$.

Dimostrazione. Sia $v \in V$ tale che $\alpha(v) = 1$; allora $V = \mathcal{L}(v) \bigoplus \mathrm{Ker}\alpha$ e allora possiamo e dobbiamo definire

$$F(\lambda v + w) = \lambda f \circ J^{-1}(v) + \overline{f} \circ \overline{J}^{\,-1}(w)$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e ogni $w \in \mathrm{Ker}\alpha$. Si tratta di verificare che F è lineare e che $F \circ J = f$, ma è facile. $\square$

In queste circostanze diremo che F è l'unica estensione lineare di f, o anche l'*omogeneizzazione* di f. In particolare α è l'unica estensione lineare della funzione $X \longrightarrow \mathbb{K}$ che vale costantemente 1.

Corollario 2. *Siano* $(X, \overline{X}, -)$ *uno spazio affine,* (V, α) *un' estensione vettoriale di* X *mediante* $J : X \longrightarrow \{\alpha = 1\}$ *e* (U, β) *un' estensione vettoriale di* X *mediante* $j : X \longrightarrow \{\beta = 1\}$. *Esiste un'unico isomorfismo baricentrico* $T \in \mathrm{Hom}(V, U)$ *tale che* $T \circ J = j$.

Dimostrazione. Per la proposizione precedente esiste $T \in \mathrm{Hom}(V, U)$ tale che $T \circ J = j$ ed esiste $S \in \mathrm{Hom}(U, V)$ tale che $S \circ j = J$; da cui segue che $S \circ T \circ J = J$; ma è ovvio che $\mathrm{id}_V \circ J = J$, dall'unicità si deduce che

$S \circ T = \mathrm{id}_V$. Analogamente si ha che $T \circ S = \mathrm{id}_U$, e quindi S, T sono isomorfismi lineari, uno l'inverso dell'altro.

Inoltre $\beta \circ T \circ J$ vale costantemente 1 su X e quindi $\beta \circ T$ è l'unica estensione lineare di tale mappa. Ma anche α lo è e quindi T è baricentrico. □

1.4 Spazi affini euclidei

In questa sezione il campo degli scalari è $\mathbb{R}$.

Definizione 10. *Uno* spazio affine euclideo *è una quaterna ordinata* $(X, \overline{X}, -, \langle\ ,\ \rangle)$ *dove* $(X, \overline{X}, -)$ *è uno spazio affine e* $\langle\ ,\ \rangle$ *è un prodotto scalare su* $\overline{X}$*.*

In uno spazio affine euclideo possiamo definire la *distanza* tra punti di X ponendo $d(P,Q) = |Q-P| = \sqrt{\langle Q-P, Q-P\rangle}$, e, come conseguenza della proprietà della norma negli spazi vettoriali euclidei questa funzione $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ gode delle seguenti proprietà

- Per ogni $P, Q \in X,\ d(P,Q) = d(Q,P) \geq 0$.
- Per ogni $P, Q \in X,\ d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$.
- Per ogni $P, Q, R \in X,\ d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)$,(disuguaglianza triangolare).

Cioè (X, d) è quello che i matematici chiamano uno *spazio metrico*.

1.5 Isometrie

Definizione 11. *Siano* X, Y *spazi affini euclidei; una mappa affine* $f : X \longrightarrow Y$ *è detta* isometria *se* $\overline{f} \in O(\overline{X}, \overline{Y})$.

Lemma 1. *Siano* V, W *spazi vettoriali euclidei e* $T : V \longrightarrow W$ *una funzione (insiemistica!!!!) che soddisfa*

- $T(0) = 0$.
- $\forall v, w \in V,\ |T(v) - T(w)| = |v - w|$.

Allora $T \in O(V, W)$.

Dimostrazione. Prendendo $w = 0$ avremo, in particolare, $|T(v)| = |v|$, $\forall v \in V$, e poi, per ogni $v, w \in V$

$$|T(v)|^2 - 2\langle T(v), T(w)\rangle + |T(w)|^2 = |T(v) - T(w)|^2 =$$

$$|v - w|^2 = |v|^2 - 2\langle v, w\rangle + |w|^2$$

da cui segue che $\langle T(v), T(w)\rangle = \langle v, w\rangle$, $\forall v, w \in V$.

Per provare che T è lineare ci basta verificare che, per ogni $v, w \in V$, $\langle T(v + w) - T(v) - T(w), T(v + w) - T(v) - T(w)\rangle = 0$ e che, per ogni $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle T(\lambda v) - \lambda T(v), T(\lambda v) - \lambda T(v)\rangle = 0$; entrambe le verifiche sono un calcolo facilissimo. $\square$

Teorema 2. *Siano X, Y spazi affini euclidei, $f : X \longrightarrow Y$ una funzione di insiemi; le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *f è un'isometria.*
2. *Per ogni $P, Q \in X$, $d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$.*

Dimostrazione. $1 \Rightarrow 2$ è una banalità.

$2 \Rightarrow 1$. Sia $O \in X$ e proviamo che $f_O : \overline{X} \longrightarrow \overline{Y} \in O(\overline{X}, \overline{Y})$. Alla luce del lemma precedente ci basta provare che $f_O(0) = 0$ e che, per ogni $v, w \in \overline{X}$, $|f_O(v) - f_O(w)| = |v - w|$; $|f_O(0)| = |f(O + 0) - f(O)| = |f(O) - f(O)| = 0$; inoltre $|f_O(v) - f_O(w)| = |f(O + v) - f(O) - f(O + w) + f(O)| = d(f(O + v), f(O + w)) = d(O + v, O + w) = |O + v - (O + w)| = |v - w|$. $\square$

Nel seguito ci occuperemo di mappe affini ed isometrie in cui dominio e codominio coincidono. In particolare indicheremo con il simbolo $\mathrm{Aff}(X)$ l'insieme di tutte le mappe affini e biettive da uno spazio affine X a se stesso e con $\mathrm{Is}(X)$ l'insieme di tutte le isometrie da uno spazio affine euclideo X a se stesso; gli elementi di $\mathrm{Aff}(X)$ sono chiamati *affinità* di X, quelli di $\mathrm{Is}(X)$ sono le *isometrie* di X. Questi due insiemi, equipaggiati con la consueta composizione di funzioni, sono due sottogruppi del gruppo delle permutazioni di X.

Definizione 12. *Siano X uno spazio affine euclideo, $f \in \mathrm{Is}(X)$, $A \subseteq X$. Si dice che f* fissa *A se, per ogni $a \in A$, $f(a) = a$. L'insieme di tutte le $f \in \mathrm{Is}(X)$ che fissano A viene indicato con $\mathrm{Is}(X, A)$.*

Proposizione 10. *Siano X uno spazio affine euclideo, $A \subseteq X$; l'insieme $\mathrm{Is}(X, A)$ è un sottogruppo di $\mathrm{Is}(X)$.*

Viceversa, se $f \in \mathrm{Is}(X)$ indichiamo con $\mathrm{F}(f)$ l'insieme dei punti di X fissati da f.

Proposizione 11. *Per ogni* $f \in \mathrm{Is}(X)$, $\mathrm{F}(f) \blacktriangleleft X$.

Dimostrazione. L'affermazione è corretta se $\mathrm{F}(f) = \emptyset$; supponiamo dunque che $O \in \mathrm{F}(f)$. Notiamo che $P \in \mathrm{F}(f) \Leftrightarrow f(P) = P \Leftrightarrow f(P) - f(O) = P - O \Leftrightarrow \overline{f}(P - O) = P - O$; cioè $\phi_O(\mathrm{F}(f)) = \mathrm{Ker}(\overline{f} - \mathrm{id}_{\overline{X}})$. □

1.6 Classificazione delle isometrie del piano

In questa sezione supporremo sempre che X sia uno spazio euclideo di dimensione 2, cioè un *piano euclideo.*

Proposizione 12. *Se* $f \in \mathrm{Is}(X)$ *ha tre punti fissi non allineati allora* $f = \mathrm{id}_X$.

La dimostrazione segue immediatamente dal punto 7 dell'esempio 2.

Proposizione 13. *Se* $f \in \mathrm{Is}(X)$ *ha due punti fissi allora* $f = \mathrm{id}_X$ *oppure è una riflessione che ha per asse la retta che passa per tali punti.*

L'enunciato, per quanto intuitivo, è un po' sibillino; lo esplicitiamo a beneficio della lettrice timida: detti P_1, P_2 due punti fissati da f, si vuole intendere che, per ogni $P \in X$,
$f(P) - P \in \mathcal{L}(P_2 - P_1)^{\perp}$ e che $P + \frac{1}{2}(f(P) - P) \in P_1 + \mathcal{L}(P_2 - P_1)$. La dimostrazione di questa proposizione ed alcune che seguiranno faranno pesante riferimento alla classificazione degli operatori ortogonali in dimensione 2.

Dimostrazione. L'ipotesi dice che $\overline{f}$ ha 1 come autovalore (e $P_2 - P_1$ ne è autovettore). Se $\overline{f} \neq \mathrm{id}_{\overline{X}}$ allora anche -1 ne è autovalore e l'autospazio di -1 è proprio $\mathcal{L}(P_2 - P_1)^{\perp}$; sia u un generatore di $\mathcal{L}(P_2 - P_1)^{\perp}$. Per ogni $P \in X$, $P - P_1 = x(P_2 - P_1) + yu$ e $\overline{f}(P - P_1) = x(P_2 - P_1) - yu$; ne segue che

$$\langle f(P) - P, P_2 - P_1 \rangle = \langle f(P) - f(P_1), P_2 - P_1 \rangle - \langle P - P_1, P_2 - P_1 \rangle =$$

$$\langle \overline{f}(P - P_1), P_2 - P_1 \rangle - \langle P - P_1, P_2 - P_1 \rangle =$$

$$\langle x(P_2 - P_1) - yu, P_2 - P_1 \rangle - \langle x(P_2 - P_1) + yu, P_2 - P_1 \rangle =$$

$$x\langle P_2 - P_1, P_2 - P_1\rangle - x\langle P_2 - P_1, P_2 - P_1\rangle = 0.$$

Anche la verifica della seconda eguaglianza è facile, dovendosi solo verificare che $(P - P_1) + \frac{1}{2}(f(P) - P) \in \mathcal{L}(P_2 - P_1)$; si può procedere così:

$$(P - P_1) + \frac{1}{2}(f(P) - P) = (P - P_1) + \frac{1}{2}(f(P) - f(P_1) + P_1 - P) =$$

$$(P - P_1) + \frac{1}{2}(\overline{f}(P - P_1) + P_1 - P) =$$

$$(P - P_1) + \frac{1}{2}(x(P_2 - P_1) - yu - x(P_2 - P_1) - yu) = x(P_2 - P_1) + yu - yu$$

□

Proposizione 14. *Se $f \in \mathrm{Is}(X)$ ha un solo punto fisso allora è una rotazione non banale intorno a tale punto.*

Dimostrazione. Sia O il punto fisso di f. $\overline{f} \in O(\overline{X})$ e quindi può essere solo una rotazione o una riflessione; ma nel secondo caso ha un autovettore v e allora $f(O + v) = f(O) + \overline{f}(v) = O + v$ e così $O + v$ è ancora un punto fisso di f, assurdo. Quindi f è una rotazione, certo non banale perché altrimenti tutti i punti di X sarebbero fissi. □

Proposizione 15. *Se $f \in \mathrm{Is}(X)$ non ha punti fissi allora è una traslazione oppure la composizione di una traslazione T_v e una riflessione intorno ad una retta parallela a v, cioè una* glissoriflessione*.*

Dimostrazione. $\overline{f}$ può essere solo una rotazione o una riflessione; esaminiamo separatamente i due casi:

$\overline{f}$ è una rotazione. Se è l'identità allora f è una traslazione, e vinciamo. Se non lo è, certamente 1 non è un suo autovalore, e quindi l'applicazione lineare $\overline{f} - \mathrm{id}_{\overline{X}}$ è un isomorfismo. Sia $O \in X$ e sia $u \in \overline{X}$ tale che $\overline{f}(u) - u = O - f(O)$; allora $f(O + u) = f(O) + \overline{f}(u) = f(O) + (O - f(O) + u) = O + u$, assurdo.

$\overline{f}$ è una riflessione e quindi $\overline{X} = \overline{X}_1 \oplus \overline{X}_{-1}$; sia $O \in X$ e scriviamo $f(O) - O = v + w$ con $\overline{f}(v) = v$ e $\overline{f}(w) = -w$; poniamo $g = T_{-v} \circ f$, così $\overline{g} = \overline{f}$ e

$$g(O + \frac{w}{2}) = g(O) - \frac{w}{2} = f(O) - v - \frac{w}{2} = O + v + w - v - \frac{w}{2} = O + \frac{w}{2},$$

quindi g è la riflessione intorno a $O + \frac{w}{2} + \mathcal{L}(v)$ e $f = T_v \circ g$ è una glissoriflessione. □

Capitolo 2

Spazi proiettivi

2.1 Spazi proiettivi

Questa sezione ha bisogno di un richiamo che risale addirittura alla teoria elementare degli insiemi. Una *relazione* R su un insieme X è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times X$; se $(a, b) \in R$ si dice che a è in relazione con b e si scrive aRb; una relazione R su X è detta

- *riflessiva* se, per ogni $a \in X,\ aRa$.
- *transitiva* se, per ogni $a, b, c \in X,\ aRb$ e bRc implica aRc.
- *simmetrica* se, per ogni $a, b \in X,\ aRb$ implica bRa.
- *antisimmetrica* se, per ogni $a, b \in X,\ aRb$ e bRa implica $a = b$.

Una relazione R su X è detta *d'ordine* se è riflessiva, transitiva e antisimmetrica, ed è detta *d'equivalenza* se è riflessiva, transitiva e simmetrica.

Se R è una relazione d'equivalenza su X e $a \in X$ la *classe* di a è l'insieme $[a] = \{x \in X \text{ tali che } aRx\}$, certamente non vuoto dal momento che, grazie al fatto che R è riflessiva, $a \in [a]$; è facile verificare che $[a] \cap [b] \neq \emptyset \Leftrightarrow aRb \Leftrightarrow [a] = [b]$. L'insieme di tutte le classi $[a]$, al variare di a in X, è detto *insieme quoziente* di X modulo R e indicato con X/R. Si tratta di un sottoinsieme dell'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$. La funzione $\pi : X \longrightarrow X/R$ definita da $\pi(a) = [a]$ è detta la *proiezione canonica*; è suriettiva.

La parola "classificare"un insieme X significa invariantemente stabilire un'opportuna relazione d'equivalenza R su X e studiare l'insieme quoziente X/R.

Possiamo fornire un esempio particolarmente importante di relazione d'equivalenza come segue: supponiamo di avere un insieme X ed un gruppo G:

Definizione 13. *Un'* azione sinistra *di G su X è una funzione $G \times X \longrightarrow X$, che indicheremo con la notazione $(g, x) \to gx$, che gode delle seguenti proprietà*

AZ1 Per ogni $g, h \in G$ e per ogni $x \in X$, $g(hx) = (gh)x$.

AZ2 Se e è l'elemento neutro di G, allora, per ogni $x \in X$, $ex = x$.

Un esempio tipico, anche se non l'unico, è quando G è un sottogruppo del gruppo delle permutazioni di X e fx è definito da $fx = f(x)$.

Se $G \times X \longrightarrow X$ è un'azione (sinistra) definiamo una relazione R su X ponendo $xRy \Leftrightarrow \exists g \in G$ tale che $y = gx$. Questa relazione è riflessiva esattamente perché, per ogni $x \in X$, $x = ex$, è transitiva perché, se $y = gx$ e $z = hy$ allora $z = hy = h(gx) = (hg)x$ ed è simmetrica perché, se $y = gx$ allora $g^{-1}y = g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = ex = x$. Dunque R è una relazione d'equivalenza, e se $a \in X$, la sua classe di equivalenza $[a]$ viene chiamata l'*orbita* di a.

Analogamente si definisce il concetto di *azione destra* e quanto ne segue.

Definizione 14. *Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$; il suo* spazio proiettivo *è l'insieme $P(V)$ di tutte le rette (vettoriali) di V.*

Se $\dim V = 0$ allora $P(V) = \emptyset$; si definisce la dimensione di uno spazio proiettivo $P(V)$ ponendo $\dim P(V) = \dim V - 1$; se $\dim P(V) = 1$ si dice che $P(V)$ è una *retta proiettiva*, se $\dim P(V) = 2$ si dice che $P(V)$ è un *piano proiettivo*. Se $V = \mathbb{K}^{n+1}$ si usa la notazione $P(n, \mathbb{K})$ per indicare lo spazio proiettivo $P(\mathbb{K}^{n+1})$.

Gli elementi di uno spazio proiettivo vengono chiamati *punti proiettivi* o semplicemente *punti*.

Se $V \neq \{0\}$ possiamo definire una funzione $\pi : V - \{0\} \longrightarrow P(V)$ mediante $\pi(v) = \mathcal{L}(v)$; evidentemente π è suriettiva, e $\pi(v) = \pi(w)$ se e solo se esiste $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ tale che $v = \lambda w$: in altri termini possiamo identificare $P(V)$ con l'insieme delle orbite dell'azione ovvia di $\mathbb{K}^*$ su $V - \{0\}$. π viene chiamata la *proiezione canonica* e, se $v \in V - \{0\}$, indicheremo con $[v]$ la sua classe d'equivalenza.

2.2 Sottospazi proiettivi

Sia $P(V)$ uno spazio proiettivo e $W \triangleleft V$; si dice che $P(W)$ è un *sottospazio proiettivo* di V; ovviamente $P(W) = \pi(W - \{0\})$. Evidentemente $W \subseteq U$ se e solo se $P(W) \subseteq P(U)$. La *codimensione* di $P(W)$ è $\text{codim}P(W) = \dim P(V) - \dim P(W) = \dim V - \dim W$, i sottospazi proiettivi di codimensione 1 si chiamano *iperpiani*.

È facile vedere che l'intersezione di una qualsiasi famiglia di sottospazi proiettivi è ancora un sottospazio proiettivo, per la precisione: se $\mathcal{A}$ è una famiglia di sottospazi vettoriali di V allora

$$\bigcap_{W \in \mathcal{A}} P(W) = P(\bigcap_{W \in \mathcal{A}} W).$$

Se $B \subseteq P(V)$ possiamo considerare la famiglia $\mathcal{B}$ costituita da tutti i sottospazi proiettivi di $P(V)$ che contengono B; la sua intersezione è il più piccolo sottospazio proiettivo che contiene B ed è indicata con $\mathcal{L}(B)$. In particolare se U, W sono sottospazi vettoriali di V si controlla facilmente che $\mathcal{L}(P(U) \cup P(W)) = P(U + W)$ e, dalla tradizionale formula di Grassmann segue la

Proposizione 16 (Formula di Grassmann proiettiva)**.** *Se U, W sono sottospazi finitamente generati di V allora*

$$\dim \mathcal{L}(P(U) \cup P(W)) = \dim P(U) + \dim P(W) - \dim P(U) \cap P(W).$$

Corollario 3. *In un piano proiettivo due qualunque rette si intersecano.*

In uno spazio proiettivo di dimensione 3 *una retta ed un piano si intersecano e due piani hanno almeno una retta in comune.*

Il che ci fa capire la differenza tra spazi affini e proiettivi. Due sottospazi proiettivi si dicono *in posizione generale* se la loro intersezione ha la dimensione più piccola che la formula di Grassmann proiettiva consente. Quindi due iperpiani sono in posizione generale se e solo se non coincidono.

2.3 Riferimenti proiettivi

Sia $P(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n. Se $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_{n+1})$ è una base di V e $P \in P(V)$ possiamo prendere $0 \neq v \in V$ tale che $\pi(v) = P$, cioè

$\mathcal{L}(v) = P$; se $v = \sum_{i=1}^{n+1} x_i b_i$ potremmo tentare di dire che le coordinate di P rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono $x_1, \dots, x_{n+1}$. Un difetto in questa definizione balza immediatamente all'occhio: se $P = \pi(w) = \pi(v)$ non siamo affatto sicuri che $v = w$ e quindi che v, w abbiamo le stesse coordinate rispetto a $\mathcal{B}$; ma allora le coordinate di P sono quelle di v o quelle di w? Impossibile fare una scelta. Tuttavia la possibile ambiguità è ragionevolmente controllabile: infatti sarà certamente $w = \lambda v$, per qualche $\lambda \in \mathbb{K}^*$, e quindi, se $v = \sum_{i=1}^{n+1} x_i b_i$ allora $w = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda x_i b_i$

Definizione 15. *Si dice che* $(x_1, \dots, x_{n+1})$ *sono* coordinate omogenee *di* $P \in P(V)$ *rispetto alla base* $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_{n+1})$ *di* V *se il vettore* $v = \sum_{i=1}^{n+1} x_i b_i \in V$ *soddisfa* $\pi(v) = P$*, cioè* v *è un rappresentante della classe* P*. Esse sono uniche solo a meno di un fattore di proporzionalità, per questo motivo sono indicate con la notazione* $(x_1 : \dots : x_{n+1})$*.*

In altri termini la scelta di una base di V permette di stabilire una corrispondenza biunivoca tra $P(n, \mathbb{K})$ e $P(V)$.

Disgraziatamente le coordinate omogenee di un punto $P \in P(V)$ dipendono proprio dalla base $\mathcal{B}$ e non dalla $(n+1)-$upla ordinata $(P_1, \dots, P_{n+1})$ determinati da $P_i = \pi(b_i)$, $\forall i = 1, \dots, n+1$. Un esempio ci convincerà: prendiamo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ e scegliamo la base standard. Sia $P \in P(2, \mathbb{R})$ il punto di coordinate omogenee $(6 : 2 : 6)$ rispetto alla base standard. La base $\mathcal{B}$ data da $b_1 = 3e_1$, $b_2 = -e_2$, $b_3 = 2e_3$, pur soddisfacendo $\pi(b_i) = \pi(e_i)$, $i = 1, 2, 3$ fornisce, per il medesimo punto P, le coordinate omogenee $(2 : -2 : 3)$.

Evidentemente il problema nasce dal fatto che da $\pi(b_i) = \pi(e_i)$ possiamo solo dedurre l'esistenza di $\lambda_i \neq 0$ tale che $b_i = \lambda_i e_i$; le coordinate omogenee di un punto rispetto alle due basi sarebbero le stesse a condizione che tutti i λ_i fossero uguali. Possiamo forzare questa condizione a costo di usare un punto in più.

Torniamo alla situazione generale.

Proposizione 17. *Siano* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$ *due basi di* V *tali che*

- $\pi(b_i) = \pi(c_i)$, $\forall i = 1, \dots, n+1$.
- $\pi(\sum_{i=1}^{n+1} b_i) = \pi(\sum_{i=1}^{n+1} c_i)$.

Allora le due basi sono proporzionali, cioè esiste $\lambda \in \mathbb{K}^*$ *tale che* $c_i = \lambda b_i$, $\forall i = 1, \dots, n+1$.

Dimostrazione. Per ogni $i = 1, \ldots, n+1$ esiste $\lambda_i \in \mathbb{K}^*$ tale che $c_i = \lambda_i b_i$, inoltre esiste $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tale che $\sum_{i=1}^{n+1} c_i = \lambda \sum_{i=1}^{n+1} b_i$. Ma allora

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda b_i = \lambda \sum_{i=1}^{n+1} b_i = \sum_{i=1}^{n+1} c_i = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i b_i$$

da cui, per l'unicità delle coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$, si evince che $\lambda_i = \lambda$, $\forall i = 1, \ldots, n+1$. □

Naturalmente le coordinate omogenee di un punto di $P(V)$ rispetto a due basi proporzionali coincidono.

Proposizione 18. *Sia $(P_1, \ldots, P_{n+2})$ una $(n+2)-$upla ordinata di punti in uno spazio proiettivo $P(V)$. Le seguenti condizioni sono equivalenti*

1. *Esiste una $(n+2)-$upla ordinata $(b_1, \ldots, b_{n+2})$ in V tale che*
   - $\pi(b_i) = P_i$, $\forall i = 1, \ldots, n+2$
   - *Per ogni $i = 1, \ldots, n+2$ la $(n+1)-$upla ordinata che si ottiene escludendo b_i è una base di V.*
2. *Se $(c_1, \ldots, c_{n+2})$ è una $(n+2)-$upla ordinata in V tale che $\pi(c_i) = P_i$, $\forall i = 1, \ldots, n+2$, allora, per ogni $i = 1, \ldots, n+2$, la $(n+1)-$upla ordinata che si ottiene escludendo c_i è una base di V.*

Dimostrazione. $1 \Rightarrow 2$. Per ogni $i = 1, \ldots, n+2$ esiste $\lambda_i \in \mathbb{K}^*$ tale che $c_i = \lambda_i b_i$. Supponiamo per assurdo che, per un certo $j = 1, \ldots n+2$, la $(n+1)-$upla ordinata $(c_1, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots, c_{n+2})$ non sia una base di V, cioè sia linearmente dipendente.

Allora esiste una $(n+1)-$upla ordinata $(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_{n+2})$ non tutti nulli tali che $0 = \sum_{i \neq j} x_i c_i = \sum_{i \neq j} x_i \lambda_i b_i$ e, dato che gli scalari $x_i \lambda_i$ non sono tutti nulli, si trova che $(b_1, \ldots, b_{j-1}, b_{j+1}, \ldots, b_{n+2})$ non è linearmente indipendente, assurdo.

$2 \Rightarrow 1$. Ovvio. □

Definizione 16. *Sia $P(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n. Un* riferimento proiettivo *di $P(V)$ è una $(n+2)-$upla ordinata di punti $(P_1, \ldots, P_{n+2})$ che soddisfa una delle condizioni menzionate nella proposizione 18.*

Ogni spazio proiettivo $P(V)$ ha un riferimento proiettivo, basta scegliere una base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_{n+1})$ di V e definire $P_i = \pi(b_i)$ per $i = 1, \dots, n+1$ e $P_{n+2} = \pi(\sum_{i=1}^{n+1} b_i)$, che è chiamato il *punto unito* della base $\mathcal{B}$. In particolare il *riferimento proiettivo standard* di $P(n, \mathbb{K})$ si ottiene in questo modo a partire dalla base standard di $\mathbb{K}^{n+1}$.

Proposizione 19. *Sia $\mathcal{P} = (P_1, \dots, P_{n+2})$ un riferimento proiettivo dello spazio proiettivo $P(V)$; esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $P_i = \pi(b_i)$ per ogni $i = 1, \dots, n+1$ e $P_{n+2} = \pi(\sum_{i=1}^{n+1} b_i)$. Una tale base viene chiamata* base indotta *dal riferimento proiettivo. Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono entrambe indotte dal riferimento proiettivo $\mathcal{P}$ allora sono proporzionali.*

Dimostrazione. Per ogni $i = 1, \dots, n+2$ scegliamo $b'_i \in V$ tale che $\pi(b'_i) = P_i$; per la proposizione 18, $(b'_1, \dots, b'_{n+1})$ è una base di V, quindi esistono degli scalari tali che $b'_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i b'_i$; sempre dalla stessa proposizione si deduce facilmente che tali scalari sono tutti non nulli. Ponendo $b_i = \lambda_i b'_i$ per $i = 1, \dots, n+1$ si ottiene una base indotta da $\mathcal{P}$. L'altra affermazione segue dalla proposizione 17. □

E, finalmente,

Definizione 17. *Siano $\mathcal{P} = (P_1, \dots, P_{n+2})$ un riferimento proiettivo dello spazio proiettivo $P(V)$ e $P \in P(V)$. Si dice che $(x_1 : \dots : x_{n+1})$ è un* sistema di coordinate omogenee *di P se esistono una base $\mathcal{B}$ indotta da $\mathcal{P}$ ed un vettore $v \in V$ tali che $v = \sum_{i=1}^{p+1} x_i b_i$ e $\pi(v) = P$. Tali coordinate omogenee dipendono solo da P e da $\mathcal{P}$ e non da v o da $\mathcal{B}$.*

E siamo fuori da questo infernale ginepraio. Gestire in pratica questi concetti è, per fortuna, molto meno intricato che definirli formalmente.

2.4 Equazioni dei sottospazi proiettivi

Sia $P(V)$ uno spazio proiettivo di dimensione n e $P(W)$ un suo sottospazio proiettivo di dimensione p, cioè $W \triangleleft V$ e $\dim W = p+1$, sia $(v_1, \dots, v_{p+1})$ una base di W; avremo allora che $P \in P(W)$ se e solo se esiste $v \in W$ tale che $\pi(v) = P$, e questo accade se e solo se esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1} \in \mathbb{K}$ tali che $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i v_i = v$.

Sia ora $\mathcal{P} = (P_1, \dots, P_{n+1})$ un riferimento proiettivo di $P(V)$ e $\mathcal{B}$ una base di V indotta da $\mathcal{P}$; esprimiamo ciascuno dei vettori v_j e v come combinazione lineare della base $\mathcal{B}$: sia $v_j = \sum_{i=1}^{n+1} p_{ij} b_i$ e $v = \sum_{i=1}^{n+1} x_i b_i$, di modo che $(x_1 : \ldots : x_{n+1})$ sono le coordinate omogenee di $P = \pi(v)$.

In definitiva avremo che $P \in P(W)$ se e solo se esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1} \in \mathbb{K}$ tali che

$$\begin{array}{lllllll}
x_1 & = & p_{11}\lambda_1 & + & \ldots & + & p_{1,p+1}\lambda_{p+1} \\
x_2 & = & p_{21}\lambda_1 & + & \ldots & + & p_{2,p+1}\lambda_{p+1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x_{n+1} & = & p_{n+1,1}\lambda_1 & + & \ldots & + & p_{n+1,p+1}\lambda_{p+1}
\end{array}$$

E queste sono le *equazioni parametriche* del sottospazio proiettivo $P(W)$ rispetto al riferimento proiettivo $\mathcal{P}$. Naturalmente sono selvaggiamente non uniche, e, anche una volta scelti i vettori $v_1, \ldots, v_{p+1}$ i coefficienti λ_j sono determinati solo a meno di un fattore di proporzionalità comune. Il rango della matrice (p_{ij}) è tuttavia sempre uguale a $p+1$.

Come nella proposizione 7 possiamo trovare un'applicazione lineare $T : V \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1-(p+1)} = \mathbb{K}^{n-p}$ tale che $\mathrm{Ker} T = W$ e quindi $P \in P(W)$ se e solo se $T(v) = 0$ (notare che questa condizione non dipende dalla scelta di v, purché $\pi(v) = P$). Questa T non è certo unica, ma il suo rango è $n-p$.

Se $A = \mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(T)$ avremo che $P \in P(W)$ se e solo se le sue coordinate omogenee $(x_1 : \ldots : x_{n+1})$ rispetto al riferimento proiettivo $\mathcal{P}$ sono soluzioni del sistema omogeneo

$$\left\{\begin{array}{lllllll}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1,n+1}x_{n+1} = 0 \\
a_{12}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2,n+1}x_{n+1} = 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n-p,1}x_1 & + & a_{n-p,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{n-p,n+1}x_{n+1} = 0
\end{array}\right.$$

E queste sono le *equazioni cartesiane* del sottospazio proiettivo $P(W)$ rispetto al riferimento proiettivo $\mathcal{P}$.

Particolarmente interessante è il caso $p = n-1$, cioè $P(W)$ è un iperpiano di $P(V)$. Consideriamo l'insieme $\mathrm{Iper}(V)$ costituito da tutti i sottospazi di V di dimensione n (ricordiamo che $\dim V = n+1$) e definiamo una funzione

$$\phi : V^* - \{0\} \longrightarrow \mathrm{Iper}(V)$$

definita da $\phi(\alpha) = \mathrm{Ker}\alpha$; abbiamo appena visto che ϕ è suriettiva. Certamente non è iniettiva, ma poco ci manca

Proposizione 20. *$\phi(\alpha) = \phi(\beta)$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tale che $\beta = \lambda\alpha$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\mathrm{Ker}\alpha = \mathrm{Ker}\beta = W$, e sia $v \notin W$, cioè $\alpha(v) \neq 0$ e $\beta(v) \neq 0$ e sia $\lambda = \beta(v)\alpha(v)^{-1}$; ogni $u \in V$ si scrive in modo unico come $xv + w$, con $w \in W$ e quindi

$$\beta(u) = \beta(xv + w) = x\beta(v) = x\lambda\alpha(v) = \lambda\alpha(xv) = \lambda\alpha(u).$$

Ł'altra implicazione è ovvia. □

Quindi, ponendo $\phi([\alpha]) = \phi(\alpha)$ definiamo una corrispondenza biunivoca detta *dualità* tra $P(V^*)$ e $\mathrm{Iper}(V)$; siccome $\pi : \mathrm{Iper}(V) \longrightarrow \mathrm{Iper}(P(V))$ è una corrispondenza biunivoca, troviamo una dualità naturale anche tra $P(V^*)$ e l'insieme di tutti gli iperpiani proiettivi di $P(V)$.

2.5 Relazioni tra affine e proiettivo

In questa sezione, studieremo dapprima lo spazio vettoriale $V = \mathbb{K}^{n+1}$, il suo spazio proiettivo $P(V)$ ed il suo sottospazio affine

$$X = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \text{ tali che } x_{n+1} = 1\};$$

si tratta effettivamente di un sottospazio affine di V in quanto, se definiamo $p : V \longrightarrow \mathbb{K}$ mediante $p(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_{n+1}$, abbiamo che p è un'applicazione lineare, e dunque anche una mappa affine, e $X = p^{-1}(1)$ è un sottospazio affine (di dimensione n) di V in quanto controimmagine del singoletto $\{1\}$ di $\mathbb{K}$. La giacitura di X è

$$\overline{X} = \mathrm{Ker}\, p = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in V \text{ tali che } x_{n+1} = 0\}.$$

Fisseremo anche la base standard $\mathcal{E}$ di V, che, quando interpretata come riferimento affine di X verrà denotata come $\mathcal{E}_A$, ed il riferimento proiettivo standard $\mathcal{E}_P$ costituito dalla $(n+2)-$upla ordinata $([e_1], \dots, [e_{n+1}], [\sum_{i=1}^{n+1} e_i])$; $\mathcal{E}' = (e_1, \dots, e_n)$ è la base standard di $\overline{X}$.

Definiamo la funzione $J : X \longrightarrow P(V)$ mediante

$$J(x_1, \dots, x_n, 1) = (x_1 : \dots : x_n : 1).$$

Si tratta di una funzione iniettiva, ma non suriettiva: gli elementi che non stanno in $\mathrm{Im}(J)$ sono precisamente i punti proiettivi che hanno l'ultima coordinata proiettiva nulla, cioè gli elementi di $P(\overline{X})$; tali punti vengono chiamati *punti all'infinito* di X ed il loro insieme è denotato con ∞_X (o con X_∞).

In altri termini abbiamo trovato una corrispondenza biunivoca $J^{-1} : P(V) - P(\overline{X}) \longrightarrow X$; naturalmente questo ci permette di definire sull'insieme $P(V) - P(\overline{X})$ una struttura di spazio affine sullo spazio vettoriale $\overline{X}$ semplicemente definendo, per ogni $P, Q \in P(V) - P(W)$, $Q - P = J^{-1}(Q) - J^{-1}(P)$.

Possiamo rivedere questa costruzione in modo leggermente più astratto, e tutto sarà un po' più facile: sia V uno spazio vettoriale qualunque di dimensione $n + 1$ e W un suo iperpiano. Sia $\alpha \in V^*$ tale che $\mathrm{Ker}\alpha = W$ (ricordiamo che non è unica, ma ogni altra è un suo multiplo, nella discussione appena esposta abbiamo preso $\alpha = p$).

Definiamo una funzione $\widetilde{\alpha}$: $P(V) - P(W) \longrightarrow \{\alpha = 1\}$ mediante $\widetilde{\alpha}\,[v] = \dfrac{v}{\alpha(v)}$, dove, come nella sezione 1.3, abbiamo denotato con $\{\alpha = 1\}$ l'insieme $\{v \in V \text{ tali che } \alpha(v) = 1\}$, che è un sottospazio affine (non vettoriale) di V. Si verifica molto facilmente che $\widetilde{\alpha}$ è ben definita ed anche una corrispondenza biunivoca.

Questo ci permette di definire una struttura di spazio affine su $P(V) - P(W)$ sullo spazio vettoriale W ponendo, per ogni $[v], [v'] \in P(V) - P(W)$,

$$[v] - [v'] = \widetilde{\alpha}\,([v]) - \widetilde{\alpha}\,([v']) = \frac{v}{\alpha(v)} - \frac{v'}{\alpha(v')}.$$

Disgraziatamente questa struttura di spazio affine dipende dalla scelta di α e quindi non è come si dice in matematica "canonica".

Dobbiamo compiere un ulteriore sforzo per liberarci di questa dipendenza, ma abbiamo bisogno di qualche altro richiamo di algebra lineare elementare: se V è uno spazio vettoriale e W un suo sottospazio (non necessariamente un iperpiano) possiamo definire una relazione su V ponendo $v \sim v' \Leftrightarrow v - v' \in W$; si verifica con estrema facilità che si tratta di una relazione d'equivalenza e l'insieme quoziente viene indicato con il simbolo V/W; la classe di un $v \in V$ viene indicata con $v + W$ in quanto è costituita da tutti i $v' \in V$ ottenibili sommando a v un opportuno elemento di W.

Ogni $v + W \in V/W$ è un sottospazio affine di V, con giacitura W, quindi l'insieme quoziente V/W è costituito da tutti i sottospazi affini di V che hanno W come giacitura.

Su V/W possiamo definire le operazioni di somma ponendo $(v+W)+(v'+W)=(v+v')+W$ e di prodotto con uno scalare mediante $\lambda(v+W)=(\lambda v)+W$; si verifica molto facilmente che queste operazioni sono ben definite (cioè dipendono solo dalle classi coinvolte e non dai loro rappresentanti) e che forniscono a V/W la struttura di spazio vettoriale, detto lo *spazio vettoriale quoziente* di V *modulo* W. Il vettore nullo è dato dalla classe $0+W=W$. La proiezione canonica è un'applicazione lineare suriettiva il cui nucleo è proprio W, e quindi (nullità + rango), $\dim V/W = \dim V - \dim W$. Fine del richiamo.

Torniamo al caso in cui W è un iperiano di V e $\dim V = n+1$.

Possiamo definire un'applicazione lineare $M : \mathrm{Hom}(\mathbb{K}, W) \longrightarrow W$ ponendo $M(T) = T(1)$; si vede subito che è iniettiva e dunque, per motivi di dimensioni, un isomorfismo.

Se $\alpha \in V^*$ e $\mathrm{Ker}\alpha = W$ definiamo un'applicazione lineare

$$\underline{\alpha} : \mathrm{Hom}(\mathbb{K}, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}(V/W, W) \text{ ponendo } \underline{\alpha}(T)(u+W) = T(\alpha(u)).$$

Si vede subito che è ben definita e iniettiva (questo succede precisamente perché α è suriettiva); dunque, di nuovo per motivi di dimensioni, un isomorfismo.

Adesso ci serve un altro richiamo, questa volta a livello di spazi affini: se $(X, \overline{X}, -)$ è uno spazio affine, U è uno spazio vettoriale e $S : \overline{X} \longrightarrow U$ è un isomorfismo possiamo definire una funzione

$$-_S = X \times X \longrightarrow U$$

ponendo $Q -_S P = S(Q-P)$, e si nota, banalmente, che $(X, U, -_S)$ è ancora uno spazio affine.

Riepilogando: abbiamo dato, rassegnandoci alla dipendenza da α, una struttura di spazio affine a $P(V) - P(W)$ sullo spazio vettoriale W, componendo con $\underline{\alpha} \circ M^{-1}$, otteniamo una struttura di spazio affine su $\mathrm{Hom}(V/W, W)$ data da

$$[v] -_\alpha [v'] = \underline{\alpha} \circ M^{-1}\Big(\frac{v}{\alpha(v)} - \frac{v'}{\alpha(v')}\Big)$$

ed è nostra ambizione verificare che essa è naturale, ossia non dipende da α; in altri termini, se $\beta \in V^*$ soddisfa anche lei $\mathrm{Ker}\beta = W$, allora, per ogni $[v], [v'] \in P(V) - P(W)$

$$[v] -_\alpha [v'] = [v] -_\beta [v']$$

il che significa che, per ogni $u \in V$,

$$\underline{\alpha} \circ M^{-1}(\frac{v}{\alpha(v)} - \frac{v'}{\alpha(v')})(u+W) = \underline{\beta} \circ M^{-1}(\frac{v}{\beta(v)} - \frac{v'}{\beta(v')})(u+W).$$

Siano $T, S \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}, W)$ tali che

$$T(1) = M(T) = \frac{v}{\alpha(v)} - \frac{v'}{\alpha(v')}$$

$$S(1) = M(S) = \frac{v}{\beta(v)} - \frac{v'}{\beta(v')}$$

e dobbiamo controllare che

$$T(\alpha(u)) = \underline{\alpha}(T)(u+W) = \underline{\beta}(S)(u+W) = S(\beta(u)),$$

cioè che $T \circ \alpha = S \circ \beta$.

Grazie alla proposizione 20 esiste $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tale che $\beta = \lambda\alpha$, inoltre

$$S(1) = \frac{v}{\beta(v)} - \frac{v'}{\beta(v')} = \frac{v}{\lambda\alpha(v)} - \frac{v'}{\lambda\alpha(v')} = \lambda^{-1}\frac{v}{\alpha(v)} - \frac{v'}{\alpha(v')} = \lambda^{-1}T(1),$$

cioè $\lambda S = T$ e si vince.

Ma, ora che abbiamo scoperto lo spazio vettoriale giusto, non si potrebbe dare direttamente la struttura affine a $P(V) - P(W)$? La risposta è affermativa: basta procedere come segue: ovviamente si tratta di decidere, per ogni $[v], [v'] \in P(V) - P(W)$, il vettore $[v] - [v'] \in \mathrm{Hom}(V/W, W)$, cioè, per ogni $u \in V$ definire $([v] - [v'])(u+W) \in W$. La scelta è praticamente forzata: siccome $\mathcal{L}(v) \oplus W = V = \mathcal{L}(v') \oplus W$, esistono e sono unici $x, x' \in \mathbb{K}$, $w, w' \in W$ tali che $xv + w = u = x'v' + w'$ e allora definiamo

$$([v] - [v'])(u+W) = xv - x'v' = (xv - u) + (u - x'v') \in W$$

Si tratterebbe di verificare che questa definizione non dipende né dalla scelta di v e v' né da quella di u, ma questa verifica è fornita gratuitamente dall'osservazione che xv è l'unico punto di V in cui la retta $\mathcal{L}(v)$ interseca il sottospazio affine $u + W$, analogamente per $x'v'$.

Bisognerebbe verificare che gli assiomi $A1$ e $A2$ sono soddisfatti, ma questo viene fornito in omaggio controllando che, se $W = \mathrm{Ker}\alpha$ allora, per ogni $v, v' \in V - W$ e per ogni $u \in V$ si ha che

$$([v] - [v'])(u+W) = ([v] -_{\alpha} [v'])(u+W).$$

Ricordiamo che il termine a destra si calcola così: si trova l'unico $T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}, W)$ tale che $T(1) = \dfrac{v}{\alpha(v)} - \dfrac{v'}{\alpha(v')}$ e poi si trova $([v] -_\alpha [v'])(u+W) = T(\alpha(u))$, mentre quello di sinistra passa attraverso la ricerca degli unici $x, x' \in \mathbb{K}$ tali che $u - xv \in W,\ u - x'v' \in W$; d'altra parte $u - xv \in W = \mathrm{Ker}\alpha \Leftrightarrow 0 = \alpha(u - xv) = \alpha(u) - x\alpha(v)$, quindi $x = \dfrac{\alpha(u)}{\alpha(v)}$ e analogamente $x' = \dfrac{\alpha(u)}{\alpha(v')}$. Ma allora

$$([v] - [v'])(u + W) = xv - x'v' = \frac{\alpha(u)}{\alpha(v)}v - \frac{\alpha(u)}{\alpha(v')}v' = \alpha(u)(\frac{v}{\alpha(v)} - \frac{v'}{\alpha(v')})$$

$$= \alpha(u)T(1) = T(\alpha(u)) = ([v] -_\alpha [v'])(u + W)$$

e la verifica è terminata.

In sintesi possiamo ottenere uno spazio affine da uno spazio proiettivo semplicemente scartando un iperpiano, a nostra scelta.

Il lavoro opposto, cioè, dato uno spazio affine X, trovare uno spazio proiettivo $P(V)$ in modo che, scegliendo oculatamente un iperpiano W di V , lo spazio affine $P(V) - P(W)$ sia isomorfo a X è decisamente più interessante, ed è stato oggetto di molto studio soprattutto grazie alle sue applicazioni alla prospettiva nel disegno tecnico e artistico; si tratta di riuscire a interpretare lo spazio X come un sottospazio affine di un opportuno spazio vettoriale che contenga anche la sua giacitura, esattamente come abbiamo fatto nell'esempio riportato all'inizio di questa sezione.

In realtà abbiamo preparato nella sezione 1.3 tutti gli strumenti che ci servono. Ricordiamo infatti che, dato uno spazio affine X, possiamo trovare uno spazio di Möbius (V, α) ed un isomorfismo affine $J : X \longrightarrow \{\alpha = 1\}$; a questo punto si può interpretare l'insieme $P(V) - P(\{\alpha = 0\})$ come spazio affine sullo spazio vettoriale $\{\alpha = 0\}$ e si vede molto facilmente che la funzione che manda $P \in X$ a finire in $[J(P)] \in P(V) - P(\{\alpha = 0\})$ è un isomorfismo affine (la cui giacitura è $\overline{J} : \overline{X} \longrightarrow \{\alpha = 0\}$).

Capitolo 3

Forme quadratiche

3.1 Classificazione delle forme quadratiche

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$, che non deve avere caratteristica 2. Indichiamo con $\mathrm{Sym}(V)$ lo spazio vettoriale delle forme bilineari simmetriche su V. Se $F' \in \mathrm{Sym}(V)$ diremo che il suo *nucleo* è il sottospazio $\mathrm{Ker}F' = \mathrm{Ker}^S F' = \mathrm{Ker}^D F'$.

Definizione 18. *Una* forma quadratica *su V è una funzione $F : V \longrightarrow \mathbb{K}$ tale che esiste $F' \in \mathrm{Sym}(V)$ tale che ,$\forall v \in V$, $F(v) = F'(v,v)$; F' è detta la* forma bilineare associata *a F e F è detta la* forma quadratica associata *a F'.*

Si vede facilmente che l'insieme $\mathrm{Quad}(V)$ di tutte le forme quadratiche su V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^V$; grazie alla formula di polarizzazione la funzione $\mathrm{Sym}(V) \longrightarrow \mathrm{Quad}(V)$ che manda una forma bilineare simmetrica nella sua forma quadratica associata è un isomorfismo e quindi $\dim \mathrm{Quad}(V) = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Porremo $\mathrm{rg}(F) = \mathrm{rg}(F')$ e $\mathrm{Ker}(F) = \mathrm{Ker}(F')$; se ha senso, per esempio se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, definiremo anche la *segnatura* di una forma quadratica F come la segnatura della forma bilineare simmetrica associata, e la indicheremo con $\mathrm{sgn}(F)$.

Se $\mathcal{B}$ è una base di V, definiamo la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(F)$ di una forma quadratica $F \in \mathrm{Quad}(V)$ come quella della forma bilineare simmetrica associata a F. Se $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(F)$ l'equazione

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j = 0 \tag{3.1}$$

è detta l'*equazione* di F rispetto a $\mathcal{B}$. Dato un vettore $v \in V$ avremo che v è un vettore isotropo per F (si veda la definizione 19) se e solo se le sue coordinate soddisfano l'equazione appena citata.

Indichiamo con $\mathrm{GL}(V)$ il sottoinsieme di $\mathrm{Hom}(V, V)$ costituito da tutti gli isomorfismi di V. Equipaggiato con la composizione di funzioni $\mathrm{GL}(V)$ è un gruppo, detto *gruppo generale lineare* di V.

Se $T \in \mathrm{GL}(V)$ e $f \in \mathrm{Bil}(V)$ indichiamo con il simbolo $T^*(f)$ la forma bilineare su V definita da $T^*(f)(v, w) = f(T(v), T(w))$.

Proposizione 21. *Siano* $f \in \mathrm{Bil}(V)$, $T \in \mathrm{GL}(V)$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ *basi per* V, $A = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f)$, $P = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(T)$, $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(T^*(f))$. *Allora*

$$B = P^t AP. \tag{3.2}$$

Dimostrazione. Per ogni $i, j = 1, \ldots, n$

$$b_{ij} = T^*(f)(b_i, b_j) = f(T(b_i), T(b_j)) = f(\sum_{k=1}^{n} p_{ki} c_k, \sum_{s=1}^{n} p_{sj} c_s) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} p_{ki} \sum_{s=1}^{n} a_{ks} p_{sj} = \sum_{k=1}^{n} p_{ki} (ap)_{kj} = (p^t ap)_{ij}$$

□

Proposizione 22. *Siano* $f, g \in \mathrm{Bil}(V)$. *le seguenti condizioni sono equivalenti*

1. *Esistono basi* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$ *di* V *tali che* $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g)$.
2. *Esiste un isomorfismo* $T \in \mathrm{GL}(V)$ *tale che* $g = T^*(f)$.
3. *Per ogni base* $\mathcal{B}$ *di* V *esiste una base* $\mathcal{C}$ *di* V *tali che* $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g)$.

Dimostrazione. $1 \Rightarrow 2$. Definiamo T ponendo, per ogni $i = 1, \ldots, n$, $T(b_i) = c_i$ in questo modo $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(T) = I$ e, usando la proposizione 21, si ha

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(T^*(f)) = I^t \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) I = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g)$$

e quindi $T^*(f) = g$.

$2 \Rightarrow 3$. Sia $\mathcal{B}$ una base qualunque di V e, per ogni $i = 1, \ldots n$ poniamo $c_i = T(b_i)$; siccome T è un isomorfismo $\mathcal{C}$ è una base di V e $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(T) = I$; applicando di nuovo la proposizione 21 otteniamo che

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(T^*(f)) = I^t \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f) I = \mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f).$$

$3 \Rightarrow 1$. Ovvio. □

Per ogni $S, T \in \mathrm{GL}(V)$ e per ogni $f \in \mathrm{Bil}(V)$, $(T \circ S)^*(f) = S^*(T^*(f))$ e, evidentemente, $(\mathrm{id}_V)^*(f) = f$. Quindi la legge che manda la coppia (f, T) in $T^*(f)$ è un'azione destra del gruppo $\mathrm{GL}(V)$ su $\mathrm{Bil}(V)$. Se f è simmetrica anche $T^*(f)$ lo è e quindi $(F', T) \to T^*(F')$ definisce un'azione destra di $\mathrm{GL}(V)$ su $\mathrm{Sym}(V)$.

Infine definiamo un'azione destra di $\mathrm{GL}(V)$ su $\mathrm{Quad}(V)$ mandando (F, T) in $F \circ T$, in altri termini, se $F' \in \mathrm{Sym}(V)$ è associata a F avremo, per ogni $v \in V$, $F \circ T(v) = F(T(v)) = F'(T(v), T(v)) = T^*(F')(v, v)$, cioè $F \circ T$ è associata a $T^*(F')$.

E adesso cercheremo di classificare $\mathrm{Quad}(V)$ mediante la relazione d'equivalenza definita da questa azione. Naturalmente la proposizione 22 fornisce definizioni alternative di questa relazione.

Se $\mathrm{rg}(F) = r$ e $\mathcal{B}$ è una base che diagonalizza F' avremo che esattamente r scalari sulla matrice $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(F')$ saranno non nulli, e, riordinando se necessario la base, possiamo supporre che $F'(b_i, b_j) = 0$ se $i \neq j$ e $a_i = F'(b_i, b_i) \neq 0 \Leftrightarrow i \leq r$.

Se $v \in V$ e le sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ sono $x_1, \ldots, x_n$ avremo che

$$F(v) = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2$$

Teorema 3 (Classificazione delle forme quadratiche complesse)**.** *Sia* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. *Due forme bilineari simmetriche sono equivalenti se e solo se hanno lo stesso rango. In particolare le classi d'equivalenza di* $\mathrm{Sym}(V)$ *(e di* $\mathrm{Quad}(V)$*) sono in numero di* $n + 1$.

Dimostrazione. Supponiamo che F, G abbiano lo stesso rango e siano $\mathcal{C}$ una base F-adattata e $\mathcal{B}$ una base G-adattata. Allora le due matrici $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(F)$ e $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(G)$ sono uguali e dunque, per la proposizione 22 le forme F e G sono equivalenti.

Viceversa, se esistono basi $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}$ tali che $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(F) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(G)$ allora

$$\mathrm{rg}(F) = \mathrm{rg}\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(F) = \mathrm{rg}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(G) = \mathrm{rg}(G).$$

La seconda parte del teorema proviene dal fatto che i possibili ranghi di una matrice $n \times n$ sono tutti i numeri naturali da 0 a n. $\square$

Naturalmente il teorema appena dimostrato è suscettibile di due interpretazioni: per ogni $r \in \{0, \ldots, n\}$ consideriamo l'equazione

$$I(r) \qquad \sum_{i=1}^{r} x_i^2 = 0$$

Prima interpretazione: per ogni $F \in \mathrm{Quad}(V)$ esiste un unico r ed una base $\mathcal{B}$ di V tale che l'equazione di F rispetto a $\mathcal{B}$ è $I(r)$.

Seconda interpretazione: sia $\mathcal{B}$ una base di V; per ogni $F \in \mathrm{Quad}(V)$ esiste un unico r ed esiste $T \in \mathrm{GL}(V)$ tale che l'equazione di $F \circ T$ rispetto a $\mathcal{B}$ sia $I(r)$.

Teorema 4 (Classificazione delle forme quadratiche reali)**.** *Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Due forme bilineari simmetriche sono equivalenti se e solo se hanno la stessa segnatura. In particolare le classi d'equivalenza di* $\mathrm{Sym}(V)$ *(e di* $\mathrm{Quad}(V)$*) sono in numero di* $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Dimostrazione. Se F, G hanno la stessa segnatura allora sono equivalenti per esattamente lo stesso motivo esposto nella dimostrazione precedente.

Viceversa, se F e G sono equivalenti e $\mathcal{B}$ è una base G-adattata, per il punto 3 della proposizione 22 esiste una base $\mathcal{C}$ di V tale che $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(F) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(G)$, dunque $\mathcal{C}$ è F-adattata e F, G hanno la stessa segnatura.

Per quanto riguarda l'ultima affermazione osserviamo che le possibili segnature di una matrice diagonale di rango r sono in numero di $r+1$; il numero che dobbiamo calcolare sarà dunque $\sum_{r=0}^{n}(r+1) = \sum_{s=1}^{n+1} s = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$. □

Anche questo teorema appena dimostrato è suscettibile di due interpretazioni: per ogni $r, s \in \{0, \ldots, n\}$ tali che $r + s \leq n$ consideriamo l'equazione

$$I(r,s) \qquad \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} x_i^2 = 0$$

Prima interpretazione: per ogni $F \in \mathrm{Quad}(V)$ esistono e sono unici r, s tali che $0 \leq r + s \leq n$ ed una base $\mathcal{B}$ di V tale che l'equazione di F rispetto a $\mathcal{B}$ è $I(r,s)$.

Seconda interpretazione: sia $\mathcal{B}$ una base di V; per ogni $F \in \mathrm{Quad}(V)$ esistono e sono unici r, s tali che $0 \leq r + s \leq n$ ed esiste $T \in \mathrm{GL}(V)$ tale che l'equazione di $F \circ T$ rispetto a $\mathcal{B}$ sia $I(r,s)$.

3.2 Vettori isotropi

Definizione 19. *Sia* $F \in \mathrm{Quad}(V)$. *Un vettore* $v \in V$ *è detto* vettore isotropo *se* $F(v) = 0$*; l'insieme* $F^{-1}(0) \subseteq V$ *è detto* cono isotropo *di* F.

La parola "cono"si riferisce al fatto che, se $v \in F^{-1}(0)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ allora anche $\lambda v \in F^{-1}(0)$, certamente $0 \in F^{-1}(0)$, ma, in generale, $F^{-1}(0)$ non è un sottospazio vettoriale di V, come si vede prendendo, ad esempio, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ e F la forma bilineare data da $F(x, y) = x^2 - y^2$, associata alla forma bilineare simmetrica la cui matrice, rispetto alla base standard, è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; in questo caso il cono isotropo è dato da $\mathcal{L}(e_1 + e_2) \cup \mathcal{L}(e_1 - e_2)$ e non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

Conviene impratichirsi ancora un pochino con i vettori isotropi.

Lemma 2. *Sia* V *uno spazio vettoriale di dimensione* 2 *su* $\mathbb{K}$, $F' \in \mathrm{Sym}(V)$ *e* F *la sua forma quadratica.*

- $\mathrm{rg}(F) = 0$ *allora* $\mathrm{F}^{-1}(0) = V$.
- $\mathrm{rg}(F) = 1$ *allora* $\mathrm{F}^{-1}(0)$ *è una retta, per la precisione è* $\mathrm{Ker}(F)$.
- $\mathrm{rg}(F) = 2$ *allora* $\mathrm{F}^{-1}(0) = \{0\}$ *oppure è l'unione di due rette.*

Dimostrazione. Se $\mathrm{rg}(F) = 0$ allora F è la mappa nulla.

Supponiamo $\mathrm{rg}(F) = 1$; possiamo trovare una base $\mathcal{B}$ di V tale che $F'(b_1, b_1) = \alpha \neq 0$, $F'(b_1, b_2) = F'(b_2, b_2) = 0$; avremo allora che $F(xb_1 + yb_2) = 0 \Leftrightarrow \alpha x^2 = 0$, e quindi $F^{-1}(0) = \mathcal{L}(b_2)$ ha dimensione 1. Siccome è sempre vero che $\mathrm{Ker}(F) \subseteq F^{-1}(0)$ di deduce l'eguaglianza da motivi di dimensione.

Se invece $\mathrm{rg}(F) = 2$ esiste una base (b_1, b_2) di V tale che $F'(b_1, b_1) = \alpha, \neq 0$, $F'(b_2, b_2) = \beta \neq 0$, $F(b_1, b_2) = 0$; supponiamo che esista $0 \neq v = xb_1 + yb_2$ tale che $0 = F(v) = \alpha x^2 + \beta y^2$; allora $w = xb_1 - yb_2$ è ancora un vettore isotropo, e, siccome $x \neq 0$, $y \neq 0$, si ha che v, w sono linearmente indipendenti. Quindi $\mathcal{L}(v) \cup \mathcal{L}(w) \subseteq F^{-1}(0)$. D'altra parte $F'(v, w) \neq 0$, perché altrimenti la matrice di F' rispetto alla base (v, w) sarebbe la matrice nulla e F avrebbe rango 0; se $u = \lambda v + \mu w \in F^{-1}(0)$ abbiamo che $0 = F(u) = F(\lambda v + \mu w) = \lambda^2 F(v) + 2\lambda\mu F'(v, w) + \mu^2 F(w) = 2\lambda\mu F'(v, w)$, da cui si deduce che $\lambda = 0$ e allora $u \in \mathcal{L}(w)$ oppure $\mu = 0$ e allora $u \in \mathcal{L}(v)$. $\square$

Prendiamo ora il gruppo (moltiplicativo) $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} - \{0\}$ e definiamo un'azione

$$\mathbb{K}^* \times \mathrm{Quad}(V) \longrightarrow \mathrm{Quad}(V)$$

usando la moltiplicazione di uno scalare (in questo caso diverso da 0) con un elemento dello spazio vettoriale $\mathrm{Quad}(V)$, cioè mandando la coppia ordinata $\mathbb{K}^* \times \mathrm{Quad}(V) \ni (\lambda, F)$ in $\lambda F \in \mathrm{Quad}(V)$.

Date due forme quadratiche F, G si dice che F è *proporzionale* a G se F, G stanno nella stessa orbita.

È ovvio che, se due forme quadratiche F, G sono proporzionali (cioè $G = \lambda F$, con $\lambda \neq 0$) allora $F^{-1}(0) = G^{-1}(0)$; il viceversa non è vero in generale: prendiamo di nuovo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, F, G date rispettivamente da $F(x,y) = x^2 + y^2$ e $G(x,y) = x^2 + 2y^2$, che chiaramente non sono proporzionali pur avendo entrambe cono isotropo uguale a $\{0\}$.

Qualche volta le cose vanno meglio, per la precisione se ogni elemento di $\mathbb{K}$ ha una radice quadrata (per esempio $\mathbb{K} = \mathbb{C}$); vediamo perché:

Proposizione 23. *Se in $\mathbb{K}$ ogni elemento ha una radice quadrata,* $\dim V = 2$, $F, G \in \mathrm{Quad}(V)$ *hanno lo stesso cono isotropo allora F e G sono proporzionali.*

Dimostrazione. Se $F = 0$, allora $V = F^{-1}(0) = G^{-1}(0)$ da cui si deduce che $G = 0$. Supponiamo allora che $F \neq 0$ e dunque esiste $v \in V$ tale che $F(v) \neq 0$ e fatalmente $G(v) \neq 0$; sia $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ tale che $G(v) = \lambda F(v)$. Sia $H = G - \lambda F$, allora $F^{-1}(0) \subsetneqq H^{-1}(0)$. Se $\mathrm{rg}(F) = 1$ allora anche $\mathrm{rg}(G) = 1$ e si vede facilmente che $\mathrm{Ker}(F) = F^{-1}(0) = G^{-1}(0) = \mathrm{Ker}(G) \subseteq \mathrm{Ker}(H)$; siccome ogni elemento di V può essere scritto come $u = \alpha v + w$, con $w \in \mathrm{Ker}(H)$ si ha

$$H(u) = H'(\alpha v + w, \alpha v + w) = \alpha^2 H(v) + 2\alpha H'(v, w) + H(w) = 0.$$

Quindi $H = 0$ e la proposizione è dimostrata; notiamo che finora non abbiamo usato l'ipotesi su $\mathbb{K}$.

Se invece $\mathrm{rg}(F) = 2$, riprendendo la notazione della dimostrazione del lemma 2 ed usando l'ipotesi sul campo, sia $\mu \in \mathbb{K}$ tale che $\mu^2 = -\beta\alpha^{-1}$. Il vettore $0 \neq \mu b_1 + b_2 \in F^{-1}(0)$, quindi $F^{-1}(0)$ è l'unione di due rette. Siccome $F^{-1}(0) \subsetneqq H^{-1}(0)$ si ottiene che quest'ultimo cono isotropo coincide con V e dunque $H = 0$ e la proposizione è dimostrata anche in questo caso. $\square$

Corollario 4. *Lo stesso risultato è vero anche se* $\dim V \geq 2$.

Dimostrazione. Se $F = 0$ è ovvio. Se $F \neq 0$ e $F^{-1}(0) = G^{-1}(0)$ prendiamo $v \in V$ tale che $F(v) \neq 0 \neq G(v)$ e sia $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ tale che $\lambda F(v) = G(v)$. Vogliamo provare che , per ogni $w \in V$, $\lambda F(w) = G(w)$. Questo è certo vero se $w \in \mathcal{L}(v)$. Se non è così prendiamo il piano $W = \mathcal{L}(v, w)$; allora $(\lambda F)^{-1}(0) \cap W = G^{-1}(0) \cap W$; Per il lemma appena dimostrato le restrizioni di λF e G a W coincidono. In particolare $\lambda F(w) = G(w)$. $\square$

3.3 Quadriche proiettive e loro classificazione

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n + 1$ su un campo $\mathbb{K}$ che non ha caratteristica 2. La relazione di proporzionalità su $\mathrm{Quad}(V)$ permette di definire uno spazio proiettivo $P(\mathrm{Quad}(V))$. Ogni suo elemento viene chiamato *quadrica proiettiva* su $P(V)$; se $[F] \in P(\mathrm{Quad}(V))$ la sua *traccia* è l'insieme

$$\{[F] = 0\} = \{[v] \in P(V) \text{ tali che } F(v) = 0\}$$

cioè la proiezione del cono isotropo di F. È facile vedere che questa definizione non dipende né da F né da v ma solo da $[F]$ e da $[v]$. Nella sezione precedente abbiamo visto esattamente che, nel caso in cui $\mathbb{K}$ sia algebricamente chiuso, due quadriche proiettive sono uguali se e solo se hanno la stessa traccia.

Se $\mathcal{P} = (P_1, \ldots, P_{n+2})$ è un riferimento proiettivo di $P(V)$ e $\mathcal{B}$ è una base di V indotta da $\mathcal{P}$ (ricordiamo che $\mathcal{B}$ è definita solo a meno di proporzionalità), e $[F] \in P(\mathrm{Quad}(V))$ la *matrice* di $[F]$ rispetto a $\mathcal{P}$ è la matrice di F rispetto a $\mathcal{B}$, definita solo a meno di proporzionalità. Un'*equazione* di $[F]$ rispetto a $\mathcal{P}$ è un'equazione di F rispetto a $\mathcal{B}$; evidentemente un punto proiettivo P appartiene alla traccia di $[F]$ se e solo se le sue coordinate omogenee rispetto a $\mathcal{P}$ soddisfano un'equazione di $[F]$ rispetto a $\mathcal{P}$.

Vorremmo tentare di classificare le quadriche proiettive in modo analogo alle forme quadratiche, cioè porre su $P(\mathrm{Quad}(V))$ la relazione $\sim$ definita da $[F] \sim [G] \Leftrightarrow \exists T \in \mathrm{GL}(V)$ tale che $[F \circ T] = [G]$; in altri termini facciamo agire a destra il gruppo $\mathrm{GL}(V)$ sull'insieme $P(\mathrm{Quad}(V))$.

Naturalmente tutto il lavoro è già stato fatto nella sezione che discute la classificazione delle forme quadratiche, salvo le seguenti precisazioni:

- La forma quadratica nulla va esclusa, per cui, nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, se $\dim P(V) = n$, e cioè $\dim V = n+1$ ci saranno complessivamente $n+1$ orbite, una per ogni possibile rango di una matrice non nulla di ordine $n + 1$.

- Nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ una forma quadratica di segnatura (r, s) e una di segnatura (s, r) sono equivalenti, per cui le forme canoniche sono tutte quelle del tipo $I(r, s)$ con $1 \leq r + s \leq n + 1$ e $s \leq r$ e dunque sono in numero di $(k + 1)(k + 2) - 1$ se $n = 2k$ è pari e di $(k + 2)^2 - 1$ se $n = 2k + 1$ è dispari.

Capitolo 4

Quadriche affini

4.1 Polinomi di secondo grado sugli spazi di Möbius e su spazi affini

Anche in questa sezione $\mathbb{K}$ è un campo con caratteristica diversa da 2.

Sia (V, α) uno spazio di Möbius e $F \in \mathrm{Quad}(V)$; se $F_{|\{\alpha=1\}} = 0$ allora $F = 0$; sia infatti $v \in \{\alpha = 1\}$, per ogni $w \in \{\alpha = 0\}$ avremo che $v + w \in \{\alpha = 1\}$ e $v - w \in \{\alpha = 1\}$ per cui

$$0 = F(v + w) = F(v) + 2F'(v, w) + F(w),$$

$$0 = F(v - w) = F(v) - 2F'(v, w) + F(w)$$

da cui si deduce che $F'(v, w) = 0$ e che $F(w) = 0$, d'altra parte ogni vettore in V può essere scritto in modo unico come $u = \lambda v + w$, con $\lambda \in \mathbb{K}$ e $w \in \{\alpha = 0\}$, e allora

$$F(u) = \lambda^2 F(v) + 2\lambda F'(v, w) + F(w) = 0.$$

Definizione 20. *Sia (V, α) uno spazio di Möbius. Un* polinomio di secondo grado *sul sottospazio affine $\{\alpha = 1\}$ è una funzione $f : \{\alpha = 1\} \longrightarrow \mathbb{K}$ per cui esiste una forma quadratica $F \in \mathrm{Quad}(V)$ tale che*

- $F_{|\{\alpha=0\}} \neq 0$.
- $F_{|\{\alpha=1\}} = f$

L'osservazione che precede la definizione ci assicura che ogni polinomio di secondo grado f su $\{\alpha = 1\}$ è la restrizione di un'unica $F \in \mathrm{Quad}(V)$. Supponiamo che $\dim V = n+1$ e che $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n, b_{n+1})$ sia un riferimento affine di $\{\alpha = 1\}$ (cioè $(b_1, \ldots, b_n)$ è una base per $\{\alpha = 0\}$ e $b_{n+1} \in \{\alpha = 1\}$), allora $\mathcal{B}$ è anche una base di V; chiameremo *matrice* del polinomio di secondo grado $f = F_{|\{\alpha=1\}}$ rispetto al riferimento affine $\mathcal{B}$ la matrice di F rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Ponendo $a_{ij} = F'(b_i, b_j)$ per $i, j = 1, \ldots, n$, $c_i = F'(b_i, b_{n+1})$ e $d = F(b_{n+1}, b_{n+1})$, avremo che la matrice di cui si sta parlando è

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 & \ldots & c_n & d \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Se $P \in \{\alpha = 1\}$ ha coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ rispetto al riferimento affine $\mathcal{B}$, cioè

$$P - b_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$$

allora, interpretando P come un elemento di V, le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ saranno $(x_1, \ldots, x_n, 1)$ e allora

$$f(P) = F(P) = F'(P, P) = (x_1, \ldots, x_n, 1) \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 & \ldots & c_n & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

cioè

$$f(P) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d =$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d.$$

Si osservi che la condizione $F_{|\{\alpha=0\}} \neq 0$ si traduce nel fatto che la matrice A non è nulla, e quindi abbiamo veramente un polinomio di secondo grado come siamo abituati ad immaginarlo.

Proposizione 24. *Siano (V,α) e (W,β) spazi di Möbius e $\phi : \{\alpha = 1\} \longrightarrow \{\beta = 1\}$ un isomorfismo affine. Se $f : \{\beta = 1\} \longrightarrow \mathbb{K}$ è un polinomio di secondo grado allora $f \circ \phi : \{\alpha = 1\} \longrightarrow \mathbb{K}$ è un polinomio di secondo grado.*

Dimostrazione. Alla luce del corollario 2 esiste un unico isomorfismo baricentrico $T : (V,\alpha) \longrightarrow (W,\beta)$ tale che $T_{|\{\alpha=1\}} = \phi$ e, fatalmente $T_{|\{\alpha=0\}} = \overline{\phi}$. Se $F \in \mathrm{Quad}(W)$ soddisfa $F_{|\{\beta=0\}} \neq 0$ e $F_{|\{\beta=1\}} = f$ allora $F \circ T \in \mathrm{Quad}(V)$ soddisfa $F \circ T_{|\{\alpha=0\}} \neq 0$ e $F \circ T_{|\{\alpha=1\}} = f \circ \phi$. □

Corollario 5. *Sia $(X, \overline{X}, -)$ uno spazio affine e $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ una funzione. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *Esiste un'estensione vettoriale (W,β) di X mediante $j : X \longrightarrow \{\beta = 1\}$ tale che $f \circ j^{-1}$ è un polinomio di secondo grado su $\{\beta = 1\}$.*

2. *Per ogni estensione vettoriale (V,α) di X mediante $J : X \longrightarrow \{\alpha = 1\}$, $f \circ J^{-1}$ è un polinomio di secondo grado su $\{\alpha = 1\}$.*

Dimostrazione. $2 \Rightarrow 1$ è ovvia. $1 \Rightarrow 2$: $j \circ J^{-1} : \{\alpha = 1\} \longrightarrow \{\beta = 1\}$ è un isomorfismo affine e $f \circ J^{-1} = f \circ (j^{-1} \circ j) \circ J^{-1} = f \circ j^{-1} \circ (j \circ J^{-1})$. Basta applicare il corollario precedente. □

Definizione 21. *Sia $(X, \overline{X}, -)$ uno spazio affine. Si dice che $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ è un* polinomio di secondo grado *su X se soddisfa una delle condizioni enunciate nel corollario precedente.*

Siano $(X, \overline{X}, -)$ uno spazio affine, f un polinomio di secondo grado su X, $\mathcal{P} = (b_1, \ldots, b_n, P_{n+1})$ un riferimento affine di X (cioè $(b_1, \ldots, b_n)$ è una base di $\overline{X}$ e $P_{n+1} \in X$). Se (V,α) è un'estensione vettoriale di X mediante $J : X \longrightarrow \{\alpha = 1\}$ allora $J(\mathcal{P}) = (\overline{J}(b_1), \ldots, \overline{J}(b_n), J(P_{n+1}))$ è un riferimento affine di $\{\alpha = 1\}$, e quindi abbiamo già spiegato che cos'è la matrice del polinomio di secondo grado $f \circ J^{-1}$ rispetto a $J(\mathcal{P})$; la stessa matrice viene detta anche *matrice* di f rispetto a $\mathcal{P}$.

La sua utilità è la medesima descritta nell'equazione 4.1, infatti le coordinate di $P \in X$ rispetto a $\mathcal{P}$ sono esattamente quelle di $J(P)$ rispetto a $J(\mathcal{P})$.

Infine se $\phi \in \mathrm{Aff}(X)$ e f è un polinomio di secondo grado su X allora $f \circ \phi$ è un polinomio di secondo grado su X. Infatti se (V,α) è un'estensione vettoriale di X mediante $J : X \longrightarrow \{\alpha = 1\}$ allora

$$f \circ \phi \circ J^{-1} = f \circ (J^{-1} \circ J) \circ \phi \circ J^{-1} = (f \circ J^{-1}) \circ (J \circ \phi \circ J^{-1})$$

e si vince usando la proposizione 24 in quanto $f \circ J^{-1}$ è un polinomio di secondo grado su $\{\alpha = 1\}$ e $J \circ \phi \circ J^{-1}$ è un isomorfismo affine.

4.2 Quadriche affini

Sia $(X, \overline{X}, -)$ uno spazio affine di dimensione n e chiamiamo $\mathcal{P}_2(X)$ l'insieme di tutti i polinomi di secondo grado su X. Su questo insieme possiamo far agire (a sinistra) il gruppo moltiplicativo $\mathbb{K}^*$; le orbite di quest'azione sono le *quadriche affini* su X; il loro insieme viene indicato con $\mathrm{Quad}(X)$.

Se $[f] \in \mathrm{Quad}(X)$ possiamo definire la sua *traccia* mediante $\{[f]=0\} = \{P \in X \text{ tali che } f(P)=0\}$, la sua matrice e la sua equazione rispetto ad un riferimento affine (che sono definite solo a meno di proporzionalità).

Disgraziatamente, e in analogia con quanto detto a proposito di quadriche proiettive, quadriche affini diverse possono avere la stessa traccia: prendiamo ad esempio, sullo spazio affine $\mathbb{R}^2$ le quadriche di equazione x^2+y^2+1 e x^2+2y^2+1, che non sono proporzionali pur avendo entrambe traccia vuota.

Anche qui le cose vanno molto meglio se il campo $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso per esempio $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Teorema 5 (Nullstellensatz per quadriche affini)**.** *Se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso due quadriche con la stessa traccia coincidono.*

Dimostrazione. Si tratta di provare quanto segue: se (V,α) è uno spazio di Möbius e $F, G \in \mathrm{Quad}(V)$ soddisfano

- $F_{|\{\alpha=0\}} \neq 0 \neq G_{|\{\alpha=0\}}$,
- se $\alpha(v)=1$ allora $F(v)=0 \Leftrightarrow G(v)=0$

allora esiste $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tale che $G=\lambda F$.

Alla luce del corollario 4 basta provare che, per ogni $w \in V$, $F(w)=0$ se e solo se $G(w)=0$; questo è facile se $\alpha(w)=\mu\neq 0$, infatti

$$F(w)=0 \Leftrightarrow \mu F(\mu^{-1}w)=0 \Leftrightarrow \mu G(\mu^{-1}w)=0 \Leftrightarrow G(w)=0.$$

Supponiamo dunque che $\alpha(w)=0=F(w)$ e proviamo che $G(w)=0$ (l'altra implicazione si fa, ovviamente, scambiando i ruoli di F e G). Supponiamo anche che $w\neq 0$ altrimenti è troppo facile.

Sia $u' \in \{\alpha=0\}$ tale che $F(u')\neq 0$ e sia $W=\mathcal{L}(w,u')$, che ha dimensione 2. Esaminiamo separatamente i casi dati dal rango di $F_{|W}$:

Primo caso:rg$F_{|W}=1$, cioè esiste $u\in W$, tale che $F(u)=1$, $F'(u,w)=0$. Prendiamo a caso $v'\in\{\alpha=1\}$. Poniamo $\beta=-F'(v',u)$ e $v=v'+\beta u\in\{\alpha=1\}$, in modo che $F'(v,u)=0$. Distinguiamo tre sottocasi:

- $F'(v,w) = F(v) = 0 = G(v)$ e allora, per ogni $x \in \mathbb{K}$, $F(v+xw) = 0 = G(v+xw) = 2xG'(v,w) + x^2 G(w)$, da cui segue che $G(w) = 0$, come desiderato.

- $F'(v,w) = 0$ ma $F(v) \neq 0 \neq G(v)$ e allora, per ogni $x \in \mathbb{K}$, $0 \neq F(v+xw)$ e quindi $0 \neq G(v+xw) = G(v) + 2xG'(v,w) + x^2 G(w)$, da cui segue di nuovo che $G(w) = 0$.

- $F'(v,w) \neq 0$; ponendo $v'' = v + \dfrac{-F(v)}{2F'(v,w)} w \in \{\alpha = 1\}$ avremo che $F'(v'',u) = F(v'') = 0$. Dunque, per ogni $x, y \in \mathbb{K}$ avremo che

  $F(v'' + xu + yw) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2F'(v'',w)y = 0$ e, in particolare, per ogni $x \in \mathbb{K}$,
  $$0 = G(v'' + xu - \frac{x^2}{2F'(v'',w)} w) =$$
  $$\frac{G(w)}{4F(v'',w)^2} x^4 - \frac{G'(u,w)}{F(v'',w)} x^3 + (G(u) - \frac{G(v'',w)}{F(v'',w)}) x^2 + 2G(v,u)x;$$
  quindi questo polinomio ha infinite soluzioni ed è il polinomio nullo, in particolare $G(w) = 0$.

Secondo caso:rg$F_{|W} = 2$, cioè esiste $u \in W$ tale che $F(u) = 0$, $F'(w,u) = 1$. Prendiamo a caso $v' \in \{\alpha = 1\}$. Poniamo $\beta = -F'(v',u)$, $\gamma = -F'(v',w)$ e $v = v' + \beta w + \gamma u \in \{\alpha = 1\}$, così avremo che $F'(v,w) = F'(v,u) = 0$ e, per ogni $x \in \mathbb{K}$, $F(v+xw) = F(v)$; distinguiamo due sottocasi

- $F(v) = 0 = G(v)$ e allora, per ogni $x \in \mathbb{K}$, $0 = F(v+xw) = G(v+xw) = 2xG'(v,w) + x^2 G(w)$, da cui segue che $G(w) = 0$, come desiderato.

- $F(v) \neq 0 \neq G(v)$ e allora, per ogni $x \in \mathbb{K}$, $0 \neq F(v+xw)$ e quindi $0 \neq G(v+xw) = G(v) + 2xG'(v,w) + x^2 G(w)$, da cui segue di nuovo che $G(w) = 0$.

La dimostrazione è conclusa. $\square$

4.3 Il problema della classificazione delle quadriche affini

Sia $(X, \overline{X}, -)$ uno spazio affine; sull'insieme $\mathrm{Quad}(X)$ possiamo far agire, a destra, il gruppo $\mathrm{Aff}(X)$ mandando la coppia $([f], \phi)$ in $[f \circ \phi]$; classificare le quadriche affini significa trovare un rappresentante per ogni orbita.

Alla luce della definizione di $\mathcal{P}_2(X)$ e di $\mathrm{Quad}(X)$ basterà classificare le quadriche affini sul sottospazio affine $\{\alpha = 1\}$ di uno spazio di Möbius (V, α); avremo dunque che $[f]$, $[g] \in \mathrm{Quad}(\{\alpha = 1\})$ sono equivalenti se e solo se esiste un isomorfismo affine $\phi : \{\alpha = 1\} \longrightarrow \{\alpha = 1\}$ e $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tali che $f \circ \phi = \lambda g$. Se $F \in \mathrm{Quad}(V)$ e $G \in \mathrm{Quad}(V)$ sono tali che $F_{|\{\alpha=0\}} \neq 0 \neq G_{|\{\alpha=0\}}$, $F_{|\{\alpha=1\}} = f$ e $G_{|\{\alpha=1\}} = g$, avremo che $[f]$ e $[g]$ sono equivalenti se e solo se esiste un isomorfismo baricentrico $T \in \mathrm{GL}(V)$ e $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tali che $F \circ T = \lambda G$, da cui segue in particolare che $F_{|\{\alpha=0\}} \circ T_{|\{\alpha=0\}} = (F \circ T)_{|\{\alpha=0\}} = \lambda G_{|\{\alpha=0\}}$.

Alternativamente (confrontare la proposizione 22) avremo che $[f]$ e $[g]$ sono equivalenti se e solo se esistono due riferimenti affini $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ di $\{\alpha = 1\}$ tali che le matrici di f rispetto a $\mathcal{B}$ e di g rispetto a $\mathcal{C}$ sono proporzionali.

È indispensabile concentrarsi sulla differenza tra la classificazione delle quadriche proiettive e di quelle affini: nel primo caso il problema è il seguente: dato uno spazio vettoriale V e due forme quadratiche non nulle $F, G \in \mathrm{Quad}(V)$ possiamo trovare $T \in GL(V)$ e $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tali che $F \circ T = \lambda G$? (O, nell'altra versione, se $\mathcal{B}$ è una base di V, possiamo trovare una base $\mathcal{C}$ di V in modo che $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(F)$ e $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(G)$ siano proporzionali?). Questo problema è stato risolto nel capitolo precedente nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Nel caso affine il problema è il seguente: dato uno spazio di Möbius (V, α) e due forme quadratiche $F, G \in \mathrm{Quad}(V)$ tali che $F_{|\{\alpha=0\}} \neq 0 \neq G_{|\{\alpha=0\}}$, possiamo trovare $T \in GL(V)$, **baricentrico** e $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tali che $F \circ T = \lambda G$? (O, nell'altra versione, se $\mathcal{B}$ è un **riferimento affine** di $\{\alpha = 1\}$, possiamo trovare un **riferimento affine** $\mathcal{C}$ di $\{\alpha = 1\}$ in modo che $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(F)$ e $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(G)$ siano proporzionali?).

Un utile strumento è dato dalla seguente

Proposizione 25. *Se due forme quadratiche F, G su uno spazio di Möbius (V, α) danno quadriche affini equivalenti sul sottospazio affine $\{\alpha = 1\}$ allora $\mathrm{rg}(F) = \mathrm{rg}(G)$ e $\mathrm{rg}(F_{|\{\alpha=0\}}) = \mathrm{rg}(G_{|\{\alpha=0\}})$.*

Dimostrazione. L'ipotesi dice che esiste un isomorfismo baricentrico $T \in \mathrm{GL}(V)$ tale che $F \circ T = \lambda G$ con $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Osserviamo che $v \in \mathrm{Ker} F \circ T \Leftrightarrow$

$\forall w \in V$, $0 = T^*(F')(v,w) = F'(T(v),T(w))$, ma, siccome T è suriettiva questo avviene se e solo se, per ogni $w' \in V$, $F'(T(v),w') = 0$ cioè se e solo se $T(v) \in \mathrm{Ker}F$, cioè $T(\mathrm{Ker}F \circ T) = \mathrm{Ker}F$, in particolare, siccome T è un isomorfismo, $\dim \mathrm{Ker}F = \dim \mathrm{Ker}F \circ T$ e allora

$$\mathrm{rg}(G) = n+1-\dim \mathrm{Ker}(G) = n+1-\dim \mathrm{Ker}\lambda G = n+1-\dim \mathrm{Ker}F\circ T =$$
$$n+1-\dim T(\mathrm{Ker}F) = n+1-\dim \mathrm{Ker}F = \mathrm{rg}(F).$$

D'altra parte $T_{|\{\alpha=0\}} \in \mathrm{GL}(\{\alpha = 0\})$ e quindi, per esattamente lo stesso motivo, avremo che $\mathrm{rg}(F_{|\{\alpha=0\}}) = \mathrm{rg}(G_{|\{\alpha=0\}})$. □

4.4 Classificazione delle quadriche affini complesse

Prendiamo ora $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, poniamo $\dim V = n+1$, fissiamo un riferimento affine $\mathcal{B}$ e consideriamo, per ogni $r = 1, \dots, n$ la quadrica di *tipo* $I(r)$ la cui equazione rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$I(r) \qquad \sum_{i=1}^{r} x_i^2 = 0, \tag{4.2}$$

la quadrica di *tipo* $II(r)$ la cui equazione rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$II(r) \qquad \sum_{i=1}^{r} x_i^2 + 1 = 0 \tag{4.3}$$

e per ogni $r = 1, \dots, n-1$ la quadrica di *tipo* $III(r)$ la cui equazione rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$III(r) \qquad \sum_{i=1}^{r} x_i^2 + 2x_n = 0 \tag{4.4}$$

Proposizione 26. *Le quadriche affini che compaiono nell'elenco sono, a due a due, non equivalenti.*

Dimostrazione. La tabella

Tipo	$\mathrm{rg}(F)$	$\mathrm{rg}(F_{\|\{\alpha=0\}})$
$I(r)$	r	r
$II(r)$	$r+1$	r
$III(r)$	$r+2$	r

esprime $\mathrm{rg}(F)$ e $\mathrm{rg}(F_{|\{\alpha=0\}})$ per le quadriche comprese nell'elenco e constata che sono tutti diversi. La conclusione segue dalla proposizione 25. $\square$

Teorema 6 (Classificazione delle quadriche affini complesse)**.** *Ogni quadrica affine complessa è equivalente ad una (ed una sola) di quelle che compaiono nell'elenco.*

Dimostrazione. Sia (V, α) uno spazio di Möbius complesso di dimensione $n+1$ e $F \in \mathrm{Quad}(V)$ tale che $r = \mathrm{rg}(F_{|\{\alpha=0\}}) \geq 1$; possiamo trovare una base $(b_1, \dots, b_n)$ di $\{\alpha = 0\}$ tale che

$$F(b_i, b_j) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad i \neq j \\ 1 & \text{se} \quad 1 \leq i = j \leq r \\ 0 & \text{se} \quad r+1 \leq i = j \leq n. \end{cases}$$

Prendiamo $c_{n+1} \in \{\alpha = 1\}$ a totale casaccio, ma poi definiamo $b_{n+1} = c_{n+1} - \sum_{i=1}^{r} F(c_{n+1}, b_i) b_i$ e così si ottiene che $b_{n+1} \in \{\alpha = 1\}$ e $F(b_i, b_{n+1}) = 0$ per $i = 1, \dots, r$.

A questo punto si possono presentare tre situazioni

- Per ogni $i = r+1, \dots, n,\ F(b_i, b_{n+1}) = 0$ e $F(b_{n+1}, b_{n+1}) = 0$, e allora l'equazione di $F_{|\{\alpha=1\}}$ rispetto al riferimento affine $(b_1, \dots, b_{n+1})$ è del tipo $I(r)$. Benissimo.

- Per ogni $i = r+1, \dots, n,\ F(b_i, b_{n+1}) = 0$ ma $c = F(b_{n+1}, b_{n+1}) \neq 0$; in questo caso prendiamo $d \in \mathbb{C}$ tale che $d^2 = c$ e, per ogni $i = 1, \dots, n$, prendiamo $c_i = d b_i$; in questo modo l'equazione di $c^{-1}F$ rispetto al riferimento affine $(c_1, \dots, c_n, b_{n+1})$ è del tipo $II(r)$.

- Esiste $i \in \{r+1, \dots, n\}$ tale che $F(b_i, b_{n+1}) \neq 0$; in questo caso, riordinando se necessario $(b_{r+1}, \dots, b_n)$, possiamo supporre che $F(b_n, b_{n+1}) \neq 0$ ed è necessario un altro po' di lavoro.

Nel sottospazio vettoriale $\mathrm{Ker} F_{|\{\alpha=0\}} = \mathcal{L}(b_{r+1}, \dots, b_n) \triangleleft \{\alpha = 0\}$ prendiamo i vettori

$$c_j = \begin{cases} b_j - \dfrac{F(b_j, b_{n+1})}{F(b_n, b_{n+1})} b_n & \text{se} \quad j = r+1, \dots, n-1 \\ \dfrac{b_n}{F(b_n, b_{n+1})} & \text{se} \quad j = n. \end{cases}$$

Si controlla facilmente che $(c_{r+1}, \dots, c_n)$ sono linearmente indipendenti, e quindi una base per $\mathrm{Ker} F_{|\{\alpha=0\}}$, inoltre avremo anche che $F(c_j, b_{n+1}) = 0$ per $j = r+1, \dots, n-1$ e che $F(c_n, b_{n+1}) = 1$.

Infine prendiamo $c_{n+1} = b_{n+1} - \dfrac{F(b_{n+1}, b_{n+1})}{2} c_n$ e constatiamo facilmente che l'equazione di $F_{|\{\alpha=1\}}$ rispetto al riferimento affine $(b_1, \dots, b_r, c_{r+1}, \dots, c_{n+1})$ è del tipo $III(r)$, concludendo la dimostrazione □

Le classi d'equivalenza delle quadriche affini su uno spazio affine di dimensione n sono dunque in numero di $3n - 1$.

4.5 Classificazione delle quadriche affini reali

Prendiamo ora $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, poniamo $\dim V = n+1$, fissiamo un riferimento affine $\mathcal{B}$ e consideriamo, per ogni $r, s = 0, \dots, n$ tali che $s \leq r$ e $1 \leq r+s \leq n$ la quadrica di *tipo* $I(r, s)$ la cui equazione rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$I(r,s) \qquad \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} x_i^2 = 0. \tag{4.5}$$

Per ogni $r, s = 0, \dots, n$ tali che $1 \leq r+s \leq n$ consideriamo la quadrica di *tipo* $II(r, s)$ la cui equazione rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$II(r,s) \qquad \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} x_i^2 + 1 = 0. \tag{4.6}$$

Infine, per ogni $r, s = 0, \dots, n$ tali che $s \leq r$ e $1 \leq r+s \leq n-1$, consideriamo la quadrica di *tipo* $III(r, s)$ la cui equazione rispetto a $\mathcal{B}$ è

$$III(r,s) \qquad \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{r+s} x_i^2 + 2x_n = 0 \tag{4.7}$$

Proposizione 27. *Le quadriche affini che compaiono nell'elenco sono, a due a due, non equivalenti.*

Dimostrazione. La tabella

Tipo	$\mathrm{sgn}(F)$	$\mathrm{sgn}(F_{\vert\{\alpha=0\}})$
$I(r,s)$	(r,s)	(r,s)
$II(r,s)$	$(r+1,s)$	(r,s)
$III(r,s)$	$(r+1,s+1)$	(r,s)

esprime $\mathrm{sgn}(F)$ e $\mathrm{sgn}(F_{|\{\alpha=0\}})$ per tutte le quadriche comprese nell'elenco. La terza eventualità non è del tutto ovvia e si giustifica così: $F(\frac{b_{n+1}+b_n}{\sqrt{2}}) = 1$ mentre $F(\frac{b_{n+1}-b_n}{\sqrt{2}}) = -1$.

In particolare la tabella ci fornisce anche $\mathrm{rg}(F)$ e $\mathrm{rg}(F_{|\{\alpha=0\}})$. Questa volta la proposizione 25 è strumento troppo grossolano per i nostri scopi: ci permette solo di concludere che quadriche di tipo diverso non sono equivalenti.

Ma possiamo raffinare la proposizione: supponiamo che $F, G \in \mathrm{Quad}(V)$ producano, sul sottospazio affine $\{\alpha = 1\}$ quadriche affini equivalenti, cioè esiste un isomorfismo baricentrico $T \in \mathrm{GL}(V)$ tale che $F \circ T = \lambda G$ con $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Affermo che, se la segnatura di F è (r, s) allora la segnatura di G è (r, s) oppure (s, r).

Infatti dire che la segnatura di $F \circ T$ è (r, s) significa che esiste una base $c_1, \dots, c_{n+1}$ tale che

$$T^*F'(c_i, c_j) = F'(T(c_i), T(c_j)) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad i \neq j \\ 1 & \text{se} \quad 1 \leq i = j \leq r \\ -1 & \text{se} \quad r+1 \leq i = j \leq r+s \\ 0 & \text{se} \quad r+s+1 \leq i = j \leq n+1 \end{cases}$$

Ma allora la segnatura di F (rispetto alla base $(T(c_1), \dots, T(c_{n+1}))$ è anche (r, s).

D'altra parte $T_{|\{\alpha=0\}} \in \mathrm{GL}(\{\alpha = 0\})$ e quindi, per esattamente lo stesso motivo, avremo che $\mathrm{sgn}(F_{|\{\alpha=0\}}) = \mathrm{sgn}(F \circ T_{|\{\alpha=0\}})$.

Se $\mathrm{sgn}(F) = (r, s)$ avremo quindi

$$\begin{array}{lll} \mathrm{sgn}(G) = (r, s) & \text{se} & \lambda > 0 \\ \mathrm{sgn}(G) = (s, r) & \text{se} & \lambda < 0 \end{array}$$

Se la segnatura di $F_{|\{\alpha=0\}}$ è (r', s') allora

$$\begin{array}{lll} \mathrm{sgn}(G_{|\{\alpha=0\}})) = (r', s') & \text{se} & \lambda > 0 \\ \mathrm{sgn}(G_{|\{\alpha=0\}})) = (s', r') & \text{se} & \lambda < 0 \end{array}$$

Se F, G sono due quadriche equivalenti del tipo I o del tipo III, che verificano $\mathrm{sgn}(F_{|\{\alpha=0\}}) = (r, s)$ e $\mathrm{sgn}(G_{|\{\alpha=0\}}) = (p, q)$ allora abbiamo solo due possibilità: $(r, s) = (p, q)$ oppure $(r, s) = (q, p)$, ma le limitazioni $s \leq r$ e $q \leq p$ per i tipi I e III mostrano si verifica sempre la prima eventualità.

Supponiamo infine che F, G sono due quadriche equivalenti del tipo II, $\mathrm{sgn}(F_{|\{\alpha=0\}}) = (r, s)$ e $\mathrm{sgn}(G_{|\{\alpha=0\}}) = (p, q)$ allora abbiamo solo due possibilità: $(r, s) = (p, q)$ oppure $(r, s) = (q, p)$; nel primo caso siamo a posto, nel secondo avremo che $\mathrm{sgn}(F) = (r + 1, s) = (q + 1, p)$, ma anche $\mathrm{sgn}(G) = (p+1, q)$ e quindi $(r+1, s) = (p+1, q)$, e anche così va tutto bene, oppure $(q + 1, p) = (r + 1, s) = (q, p + 1)$ che è palesemente impossibile. $\square$

Teorema 7 (Classificazione delle quadriche affini reali)**.** *Ogni quadrica affine reale è equivalente ad una (ed una sola) di quelle che compaiono nell'elenco.*

Dimostrazione. La dimostrazione, pur molto simile a quella del teorema 6, presenta qualche sottigliezza in più e quindi la riporteremo per intero.

Sia (V, α) uno spazio di Möbius reale di dimensione $n+1$ e $F \in \mathrm{Quad}(V)$ tale che $(r, s) = \mathrm{sgn}(F_{|\{\alpha=0\}})$, con $1 \le r + s \le n$; possiamo trovare una base $(b_1, \dots, b_n)$ di $\{\alpha = 0\}$ tale che

$$F(b_i, b_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ i \neq j \\ 1 & \text{se } \ 1 \le i = j \le r \\ -1 & \text{se } \ r + 1 \le i = j \le r + s \\ 0 & \text{se } \ r + s + 1 \le i = j \le n \end{cases}$$

Prendiamo $c_{n+1} \in \{\alpha = 1\}$ a totale casaccio, ma poi definiamo $b_{n+1} = c_{n+1} - \sum_{i=1}^{r+s} \dfrac{F(c_{n+1}, b_i)}{F(b_i, b_i)} b_i$ e così si ottiene che $b_{n+1} \in \{\alpha = 1\}$ e $F(b_i, b_{n+1}) = 0$ per $i = 1, \dots, r + s$.

A questo punto si possono presentare tre situazioni

- Per ogni $i = r + s + 1, \dots, n$, $F(b_i, b_{n+1}) = 0$ e $F(b_{n+1}, b_{n+1}) = 0$; nel caso in cui $s \le r$ l'equazione di $F_{|\{\alpha=1\}}$ rispetto al riferimento affine $(b_1, \dots, b_{n+1})$ è del tipo $I(r, s)$; altrimenti l'equazione di $-F_{|\{\alpha=1\}}$ rispetto al riferimento affine $(b_1, \dots, b_{n+1})$ è del tipo $I(s, r)$.

- Per ogni $i = r + s + 1, \dots, n$, $F(b_i, b_{n+1}) = 0$ ma $c = F(b_{n+1}, b_{n+1}) \neq 0$; se $c = F(b_{n+1}, b_{n+1}) > 0$ prendiamo $d \in \mathbb{R}$ tale che $d^2 = c$ e, per ogni $i = 1, \dots, n$, prendiamo $c_i = d b_i$; in questo modo l'equazione di $c^{-1}F$ rispetto al riferimento affine $(c_1, \dots, c_n, b_{n+1})$ è del tipo $II(r, s)$.

  Se invece $c = F(b_{n+1}, b_{n+1}) < 0$ prendiamo $d \in \mathbb{R}$ tale che $d^2 = -c$ e, per ogni $i = 1, \dots, n$, prendiamo $c_i = d b_i$; in questo modo l'equazione di $-c^{-1}F$ rispetto al riferimento affine $(c_1, \dots, c_n, b_{n+1})$ è del tipo $II(s, r)$

- Esiste $i \in \{r+s+1,\dots,n\}$ tale che $F(b_i, b_{n+1}) \neq 0$; in questo caso, cambiando, se necessario F con $-F$, possiamo supporre $s \leq r$ e, riordinando, se necessario, $(b_{r+s+1},\dots,b_n)$, possiamo supporre che $F(b_n, b_{n+1}) \neq 0$ e ci vuole un altro po' di lavoro.

Nel sottospazio vettoriale $\mathrm{Ker}F_{|\{\alpha=0\}} = \mathcal{L}(b_{r+s+1},\dots,b_n) \triangleleft \{\alpha = 0\}$ prendiamo i vettori

$$c_j = \begin{cases} b_j - \dfrac{F(b_j, b_{n+1})}{F(b_n, b_{n+1})} b_n & \text{se} \quad i = r+s+1,\dots,n-1 \\ \dfrac{b_n}{F(b_n, b_{n+1})} & \text{se} \quad j = n. \end{cases}$$

Si controlla facilmente che $(c_{r+s+1},\dots,c_n)$ sono linearmente indipendenti, e quindi una base per $\mathrm{Ker}F_{|\{\alpha=0\}}$, inoltre avremo anche che $F(c_j, b_{n+1}) = 0$ per $j = r+s+1,\dots,n-1$ e che $F(c_n, b_{n+1}) = 1$.

Infine prendiamo $c_{n+1} = b_{n+1} - \dfrac{F(b_{n+1}, b_{n+1})}{2} c_n$ e constatiamo facilmente che l'equazione di $F_{|\{\alpha=1\}}$ rispetto al riferimento affine $(b_1,\dots,b_r,c_{r+1},\dots,c_{n+1})$ è del tipo $III(r,s)$, concludendo la dimostrazione. $\square$

La lettrice che desideri contare le classi d'equivalenza delle quadriche su uno spazio affine di dimensione n, troverà dapprima conveniente trattare separatamente i casi n pari o n dispari, ma poi, miracolosamente, troverà che il numero cercato è sempre $n^2 + 3n - 1$.

Osserviamo che il tipo di quadrica affine può essere determinato senza trovare esplicitamente il riferimento affine che produce una delle equazioni canoniche: basta calcolare la segnatura di F e quella di $F_{|\{\alpha=0\}}$.

4.6 Quadriche affini reali in dimensione 2 e 3

Applichiamo i risultati della sezione precedente al caso $n = 2$, ed allora le quadriche affini si chiamano *coniche affini*; i tipi possibili sono:

- $I(1,0)$ con equazione $x^2 = 0$ e traccia $b_3 + \mathcal{L}(b_2)$, una retta.

- $I(1,1)$ con equazione $x^2 - y^2 = 0$ e traccia $b_3 + \mathcal{L}(b_1 + b_2) \cup b_3 + \mathcal{L}(b_1 - b_2)$, l'unione di due rette incidenti.

- $I(2,0)$, con equazione $x^2 + y^2 = 0$ e traccia $\{b_3\}$.

- $II(1,0)$ con equazione $x^2 + 1 = 0$ e traccia vuota.
- $II(0,1)$ con equazione $-x^2+1 = 0$ e traccia $b_3+b_1+\mathcal{L}(b_2)\cup b_3-b_1+\mathcal{L}(b_2)$, l'unione di due rette parallele.
- $II(2,0)$ con equazione $x^2 + y^2 + 1$ e traccia vuota.
- $II(1,1)$ con equazione $x^2 - y^2 + 1 = 0$ e traccia che viene chiamata *iperbole*.
- $II(0,2)$ con equazione $-x^2 - y^2 + 1 = 0$ e traccia che viene chiamata *ellisse*.
- $III(1,0)$ con equazione $x^2 + 2y = 0$ e traccia che si chiama *parabola*.

Con $n = 3$ i possibili tipi sono:

- $I(1,0)$ con equazione $x^2 = 0$ e traccia costituita dal piano affine $b_4 + \mathcal{L}(b_2, b_3)$.
- $I(2,0)$ con equazione $x^2 + y^2 = 0$ e traccia costituita dalla retta affine $b_4 + \mathcal{L}(b_3)$.
- $I(1,1)$ con equazione $x^2 - y^2 = 0$ e traccia costituita dall'unione dei piani affini $b_4 + \mathcal{L}(b_1 + b_2, b_3)$ e $b_4 + \mathcal{L}(b_1 - b_2, b_3)$.
- $I(3,0)$ con equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ e traccia costituita dal punto affine b_4.
- $I(2,1)$ con equazione $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, la cui traccia viene chiamata *cono*.
- $II(1,0)$ con equazione $x^2 + 1 = 0$ e traccia vuota.
- $II(0,1)$ con equazione $-x^2 + 1 = 0$ e traccia $b_4 + b_1 + \mathcal{L}(b_2, b_3) \cup b_4 - b_1 + \mathcal{L}(b_2, b_3)$, l'unione di due piani paralleli .
- $II(2,0)$ con equazione $x^2 + y^2 + 1 = 0$ e traccia vuota.
- $II(1,1)$ con equazione $x^2 - y^2 + 1 = 0$ e traccia che si chiama *cilindro iperbolico*.

- $II(0,2)$ con equazione $-x^2 - y^2 + 1 = 0$ e traccia che si chiama *cilindro ellittico*.
- $II(3,0)$ con equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ e traccia vuota.
- $II(2,1)$ con equazione $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ e traccia che viene chiamata *iperboloide a due falde*.
- $II(1,2)$ con equazione $x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0$ e traccia che viene chiamata *iperboloide a una falda*.
- $II(0,3)$ con equazione $-x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0$ e traccia che viene chiamata *ellissoide*.
- $III(1,0)$ con equazione $x^2 + 2z = 0$ e traccia che viene chiamata *cilindro parabolico*.
- $III(2,0)$ con equazione $x^2 + y^2 + 2z = 0$ e traccia che viene chiamata *paraboloide ellittico*.
- $III(1,1)$ con equazione $x^2 - y^2 + 2z = 0$ e traccia che viene chiamata *paraboloide iperbolico* o *sella*.

Indice analitico